

1. GİRİŞ

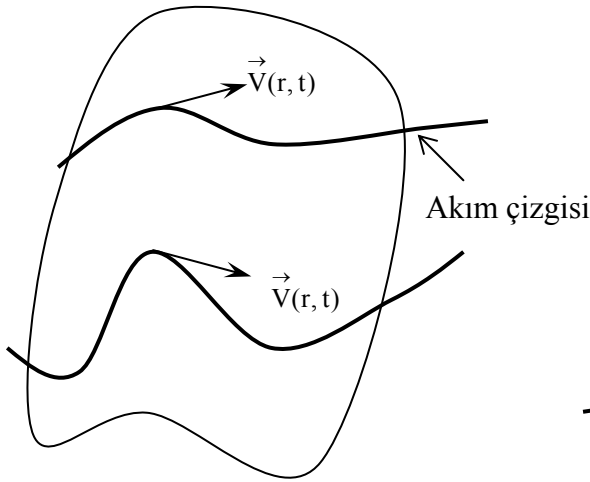
Gerçek akış problemlerini çözmek bilgisayarların ortaya çıkmasından evvel oldukça zor, hatta imkansızdı. Son zamanlarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler bunu bir nebze mümkün kılmıştır. Gerçek akış problemlerinin belirli bir yaklaşıklıkla çözümü olay hakkında bir fikir elde etmek bakımından önemlidir. Akış problemlerini yaklaşık olarak çözmek için kullanılan kabullerden biri de viskoz olmayan akış kabulüdür. Viskoz etkilerin cisim yüzeyine yakın bölgede önemli olması ve sınır tabaka denilen bu bölgenin çok ince bir bölge olması neticesinde elde edilen sonuçlar bu bölge dışında oldukça doğru değerler verecektir. Gerçek problem hakkında çoğu zaman %90 mertebesinde doğru fikir edinmek bu metodla mümkündür. Diğer bir yaklaşım ise akışkanın sıkıştırılmaz olmasıdır. Genelde sıvıların akışında bu yaklaşım oldukça doğrudur. Hava gibi sıkıştırılabilir gazların hareketinde ise, Mach sayısının düşük değerleri için sıkışamaz akışkan kabulü yapılabilir.

Bu durumda viskoz olmayan sıkışamaz akımın hareketini incelemek mümkün olabilir. Üçüncü boyuttaki etkilerin ihmal edildiği durumlarda, akım alanı iki boyutta incelenebilir. Böyle bir çalışma sonunda mesela, kanat etrafındaki akım için taşıma katsayısını tahmin etmek mümkündür.

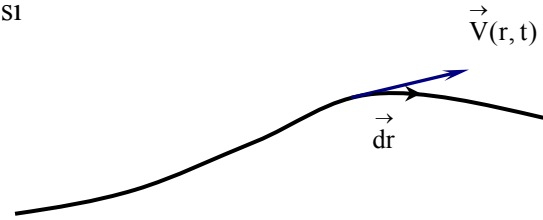
FORMÜLASYON VE TANIMLAR

2.1 Akım çizgileri

Bir akışkan taneciğinin hız vektörüne teğet olan eğri ailesidir. Hız vektörünün yönü ve şiddeti zamanla değiştiği için akım çizgilerinin yönü de zamanla değişebilir. Akım özelliklerinin zamanla değişmediği daimi akımlarda akım çizgileri ve yörüngeler özdeşdir.



Şekil 2.1



Şekil 2.2

\vec{V} , akışkan parçacığının hız vektörü ve \vec{dr} ise akım çizgisine teğet doğrultudaki diferansiyel elemanın uzunluğu olmak üzere;

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad (2.1)$$

$$\vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer hız vektörüyle akım çizgisi aynı yönde ise (paralel iseler) 2.1 ve 2.2 formüllerinin skaler çarpımının sonucunun sıfır olacağı açıktır. Yani,

$$\vec{V} // \vec{dr} \Rightarrow \vec{V} \wedge \vec{dr} = 0. \quad (2.3)$$

Aynı zamanda hız zamanın da fonksiyonu olduğundan hızı,

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

şeklinde kısaca ifade edebiliriz. (2.3) denklemini açacak olursak akım çizgilerinin denklemini

$$\vec{V} \wedge d\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (2.5)$$

şeklinde elde edilebilir.

2.2 Çevri Vektörü

Çevri akışkan parçacıklarının kendi eksenleri etrafında dönmelerinin bir ölçüsüdür. Hız vektörünün rotosyeline çevri vektörü denir.

$$\vec{\zeta} = \text{rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada hızla çevri vektörünün birbirine dik olacağı açıktır. Açısal hız ,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \quad (2.7)$$

olarak tanımlandığından çevri vektörünü,

$$\vec{\zeta} = 2 \vec{\omega} \quad (2.8)$$

şeklinde yazmak mümkündür.

$$\vec{\zeta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \zeta_x \vec{i} + \zeta_y \vec{j} + \zeta_z \vec{k} \quad (2.9)$$

Yukarıdaki ifadede yer alan bileşenler sırasıyla,

$$\zeta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} = \zeta_x(x, y, z, t) = 2w_x$$

$$\zeta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \zeta_y(x, y, z, t) = 2w_y$$

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta_z(x, y, z, t) = 2w_z$$

olarak verilir.

Düzlemsel harekette,

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w=0$$

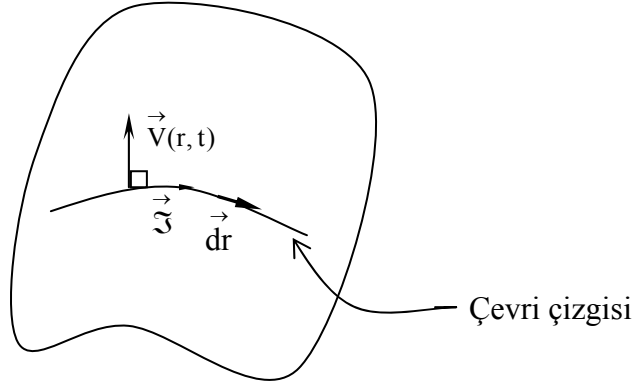
olmasından dolayı

$$\zeta_x = \zeta_y = 0, \quad \zeta_z \neq 0 \text{ ifadesine varılır.}$$

Yani, çevri vektörünün sadece z yönündeki bileşeni sıfırdan farklıdır.

2.3 Çevri Çizgileri

Bir t anındaki çevri vektörlerine teğet olan eğrilere çevri çizgileri denir. Akım çizgileri ve çevri çizgileri birbirine diktir.



Şekil 2.3

Eğer çevri çizgileriyle çevri vektörleri aynı yönlü ise (yani paralel ise) skaler çarpımlarının sıfır olması gerektiğinden,

$$\vec{S} // \vec{dr} \Rightarrow \vec{S} \wedge \vec{dr} = 0 \quad (2.10)$$

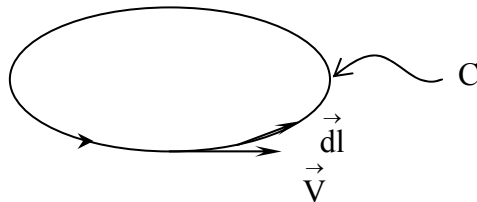
sonucu elde edilir. Buradan hareketle çevri çizgilerinin denklemi

$$\frac{dx}{\vec{S}_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\vec{S}_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\vec{S}_z(x, y, z, t)} \quad (2.11)$$

olarak elde edilebilir.

2.4 Dolaşım (Sirkülasyon)

Kapalı bir C eğrisi boyunca sirkülasyon,



Şekil 2.4

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (2.12)$$

formülüyle tanımlanır. $d\vec{l}$ kapalı eğri üzerinde diferansiyel uzunluk vektörüdür.

2.5 Kelvin teoremi

Yoğunluğun sabit kaldığı veya sadece basınca bağlı olduğu mükemmel bir akışta dolaşım (sirkülasyon) sabit kalır. Yani,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (2.13)$$

dolaşımın zamana göre türevi sıfırdır. Kelvin teoreminden hareketle başlangıçta potansiyel olan bir akım daima potansiyel kalır. Sürtünmesiz ve izentropik akımda çevri ortaya çıkmaz. Çünkü, tüm akımların durma halinden veya düz akım halinden başladığı düşünülürse, bu akımların başlangıç sirkülasyonu sıfırdır ve sıfır kalır.

2.6 Korunum Denklemleri

2.6.1 Kütlenin korunumu

Bir akışkan hareketinde seçilen, bir kontrol hacminde birim zamanda biriken kütle miktarı,

$$\dot{m}_{\text{biriken}} = \dot{m}_{\text{giren}} - \dot{m}_{\text{çıkan}} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer hareket daimi ve sıkışamaz ise,

$$\dot{m}_{\text{biriken}} = 0 \quad (2.15)$$

olacaktır. Bunun sonucunda,

$$\dot{m}_{giren} = \dot{m}_{çıkan} \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (3.3) formülünü açacak olursak,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

(3.4) denklemini elde edebiliriz. Burada ρ yoğunluk , u ve v kartezyen koordinatlardaki hız bileşenleridir. (3.4) formülünü,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.5) denklemini ise,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.19)$$

olarak kısaca ifade etmek mümkündür.

Sıkışmaz akışkan demek, yoğunluğun toplam türevinin sıfır olması, yani akışkan taneciği takip edildiğinde yoğunluğun değişmemesi demektir. Dolayısıyla

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.20)$$

olur. (3.6) denkleminin sonucu olarak,

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu denklemde $\rho \neq 0$ olacağından,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.22)$$

elde edilir. Ve süreklilik denklemi adı verilir.

2.6.3 Momentumun korunumu

Akım alanında basınçla hızlar arasındaki ilişkiyi newton'un ikinci kanunu, yani hareketin korunumu kanunu yardımıyla elde edebiliriz.

Daimi akımda, bir kontrol hacmi alıp bu kontrol hacminin yüzeyleri arasındaki momentumun birim zamanda değişimini incelersek,

$$\text{Momentum akısı (içeri- dışarı)}_x + \sum f_x = \text{momentumun } x \text{ değişimi} \quad (2.23)$$

(3.4) formülünü açacak olursak en genel halde,

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.24)$$

momentumun korunumu denklemini elde edebiliriz. Burada f_x , birim kütleye etkiyen hacim kuvveti, μ ise viskozite katsayısıdır.

2.6.3 Enerjinin Korunumu

Bir akım alanında alınan kontrol hacminin enerji miktarının zamanla değişimini,

$$\text{Enerji akısı}_{(\text{içeri-dışarı})} + \delta \dot{q}_{(\text{içeri-dışarı})} + \delta \dot{w}_{(\text{içeri-dışarı})} = \text{enerji miktarının zamanla} \quad (2.25) \\ \text{değişimi}$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Bu ifade de q kontrol hacmine birim zamanda giren ısı miktarını, w ise kontrol hacmine giren akışkanın birim zaman da yapmış olduğu işi ifade eder. Bu denklemi açacak olursak enerji denklemini,

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k \nabla^2 T + \Phi \quad (2.26)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada h , entalpi, T ise sıcaklıktır. Φ ise disipasyon terimidir. Mekanik enerjinin ısı enerjisine dönüşümünü ifade eder.

2.7 Sıkışmaz mükemmel akışkan hareketi

Sıkışmaz mükemmel akışkan hareketini viskoz etkilerin sıfır olduğu ve yoğunluğun sabit olduğu akımlarda yapabiliriz. Yani,

$$\mu = 0 \quad , \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

kabulleriyle korunum denklemlerini çözerek sıkışmaz mükemmel akışkanı inceleyebiliriz. Bu kabullerle süreklilik denklemi,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

ve momentum denklemi,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad (2.27)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemleri verilen sınır şartları için çözersek (sayısal olarak) ilgili hız alanını ve basınç dağılımını buluruz. Bu ifadede çevri vektörü,

$$\vec{\zeta} = 0 \quad \text{veya} \quad \vec{\zeta} \neq 0$$

olabilir.

2.8 Potansiyel (Çevirisiz) Hareket

Kelvin teoremine göre başlangıçta potansiyel olan bir akış daima potansiyel kalır. Her akım alanı düz bir akış alanından veya duran bir akıştan başladığına göre, bu hallerde çevri vektörü sıfırdır. Dolayısıyla sonraki zamanlarda çevri vektörü,

$$\vec{\zeta} = 0$$

olacaktır.

$$\vec{V} = \nabla\phi$$

olarak kabul edelim. Burada ϕ potansiyel fonksiyondur.

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$$

olduğu için,

$$\vec{\nabla} \times (\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

olarak yazabiliriz. \vec{V} hız vektörünün bu seçimi çevirisiz hareketi otomatik olarak sağlar.

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.29)$$

bu kabullerimizi süreklilik denklemin de yerine koyalım

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \nabla^2\phi = 0 \text{ (Laplace denklemi)} \quad (2.30)$$

elde ederiz. Laplace denkleminin verilen sınır şartları için çözümü hızlar alanını verir. Bu hız alanını kullanarak Momentum denklemi yardımıyla basınç dağılımını buluruz.

2.9 Akım Fonksiyonu

Sıkışmaz akış ve düzlemsel hareket kabulü ile u ve v hızlarının aşağıdaki gibi kabulü süreklilik denklemini sağlar.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.31)$$

bu kabulü süreklilik denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{süreklilik denklemi})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.32)$$

elde edilir. Burada ψ akım fonksiyonudur. Ve $\psi = \psi(x, y, z) = \text{sabit}$ eğrileri belirli bir t anındaki akım çizgileri denklemini verir. Potansiyel akımda üçüncü büyüttaki sirkülasyon sıfır olacağından dolayı,

$$\mathfrak{I}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.33)$$

denkleminde yerine yazarak,

$$\mathfrak{I}_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.34)$$

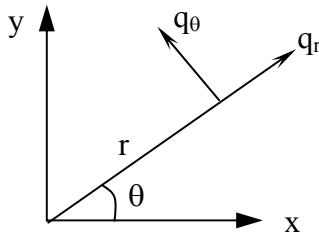
şeklinde ifade edebiliriz. Ve potansiyel fonksiyonla birleştirirsek,

$$\underbrace{\nabla^2 \phi = 0}_{\text{İki ve üç boyutta geçerli}} = \underbrace{\nabla^2 \psi = 0}_{\text{Sadece iki boyutta geçerli}} \quad (2.35)$$

olarak yazmak mümkündür. İki boyutlu harekette bir t anındaki akımda Laplace denklemi lineer bir denklemdir. Bu yüzden akım veya potansiyel fonksiyonlarının çözümleri toplanabilir.

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \psi_1 = 0 \\ \nabla^2 \psi_2 = 0 \end{array} \right\} \nabla^2 (\psi_1 + \psi_2) = 0 = \nabla^2 \psi_1 + \nabla^2 \psi_2 \text{ (süperpozisyon)} \quad (2.36)$$

2.10 Silindirik koordinatlarda akım fonksiyonu:



Şekil 2.5

\bar{q} : silindirik koordinatlarda hız olarak verilirse, teğetsel ve radyal yöndeki hız bileşenlerinin şeklindeki gibi seçimi

$$q_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.37)$$

$$q_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.38)$$

süreklilik denklemi kendiliğinden sağlanır.

Süreklilik denklemi: $\nabla \cdot \vec{q} = 0$ olarak verildiğinden

$$\text{div } \vec{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.39)$$

şeklinde yazılabilir.

2.11 Silindirik Koordinatlarda Potansiyel Hareket

$$\vec{q} = \nabla \phi \quad (2.40)$$

$$q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (2.41)$$

$$q_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.42)$$

Teğetsel ve radyal hız bileşenleri yukarıdaki gibi seçilirse $\vec{\zeta} = 0$ olma şartı kendiliğinden sağlanmış olur.

Silindirik koordinatlarda,

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (2.43)$$

şeklinde verilir. Laplace denkleminin çözümü, verilen sınır şartları için nümerik olarak çözümü mümkün olsada, her problem için yeniden yazılmalıdır. Bir başka yöntem ise laplace denklemini sağlayan analitik ψ fonksiyonlarının grafiğini çizmek ve akım çizgilerinin pratikte anlamı olan bir akımı verip vermediğini görmektir.

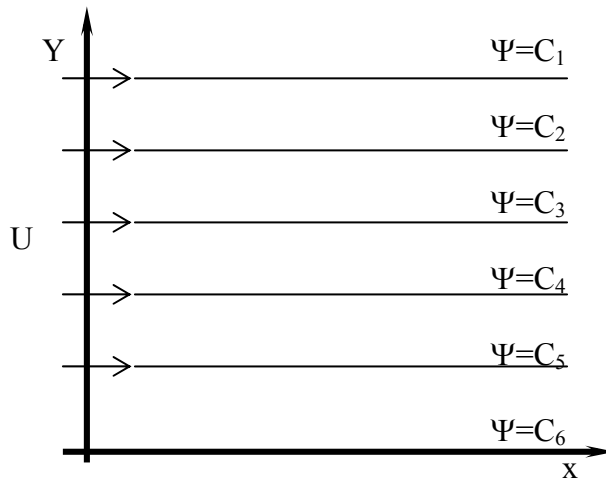
3. TEMEL $\nabla^2\psi = 0$ ÇÖZÜMLERİ

Birçok karmaşık akım 4 farklı akışın toplamı olarak elde edilebilir. Bunlar Düz akım, Kaynak veya Kuyu, Duple ve Noktasal girdaptır.

3.1 DÜZ AKIM:

Düz akımın sadece x önünde olduğunu varsayarsak (Şekil 3.1)

$u=U$ (her yerde)



Şekil 3.1

Yatay yöndeki hız bileşeni,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = U$$

olarak verildiğinden bu ifadeyi inteğre edersek,

$$\psi = Uy + f(x) \quad (3.1)$$

ifadesini elde ederiz. Aynı zamanda düşey yöndeki hızın da türevi akım fonksiyonunu vereceğinden,

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = C$$

(3.1) ifadesindeki $f(x)$ fonksiyonun sabit bir değer (C) olduğunu anlarız. Ve akım fonksiyonunu,

$$\psi = Uy + C \quad (3.2)$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Potansiyel fonksiyonuda aynı şekilde,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U$$

olarak verildiğinden

$$\phi = Ux + f(x)$$

integre ederek elde edilir. Düşey hız bileşenin türevide potansiyel fonksiyona eşit olduğundan

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = C$$

$$\phi = Ux + C \quad (3.3)$$

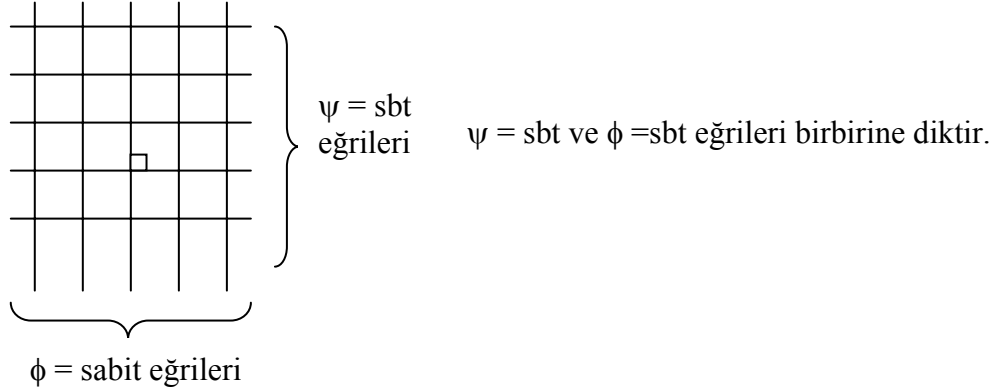
olarak akım ve potansiyel fonksiyoları düz akış için buluruz. Hız alanı ψ 'nin türevinden elde edildiği için C 'nin değeri önemli değildir. Genelde bu sabit, durma noktasından (hızın tüm bileşenlerinin sıfır olduğu nokta) geçen akım çizgisi için $\psi = 0$ olacak şekilde seçilir. Düz akışta durma noktası yoktur.

x ve y 'yi kutupsal koordinatlarda yazacak olursak, düz akım için akım ve potansiyel fonksiyonları,

$$\psi = U y + C = U r \sin \theta + C \quad (3.4)$$

$$\phi = U x + C = U r \cos \theta + C \quad (3.5)$$

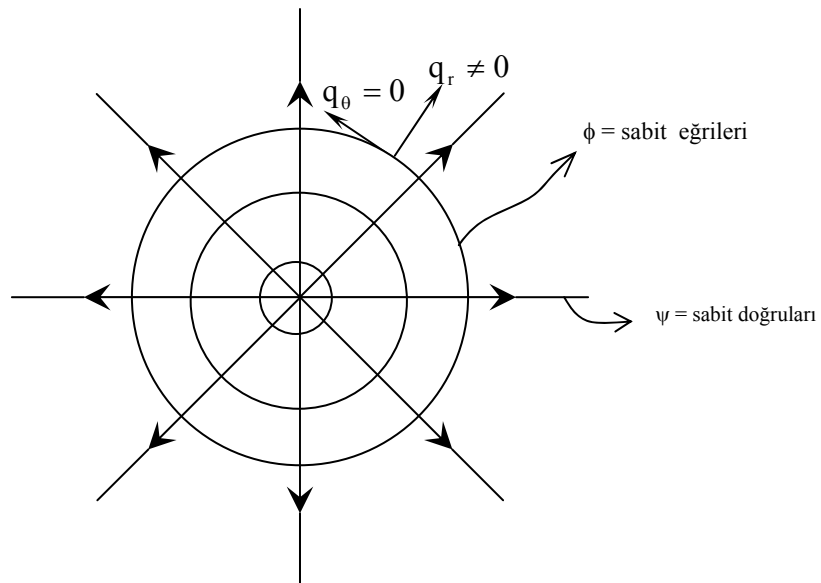
olarak yazılabilir.



Şeki 3.2

3.2 Kaynak veya Kuyu

Kaynak akımı bir noktadan radyal doğrultuda çıkan akım çizgilerinin oluşturduğu hayali bir akım şeklidir (Şeki 3.3). Kaynak akımının debisi sabit olup m ile belirtilirse, akım alanında teğetsel yöndeki hız bileşenin bulunmadığını hatırlayarak,



Şekil 3.3 Mekezde kaynak akımı

r yarıçapında ve birim derinlikten birim zamanda geçen debiyi yazarsak,

$$m = \text{debi} = q_r (2\pi r \cdot 1) \quad (3.6)$$

3. boyutta birim uzunluk

silindirik koordinatlarda radyal yöndeki hızı akım fonksiyonu cinsinden,

$$q_r = \frac{m}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

olarak verildiğinden inteğre ederek,

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta + F(r) \quad (3.7)$$

aynı zamanda akım fonksiyonu,

$$q_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

olarak tanımlandığından,

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = F'(r) = 0$$

buradan $F(r)$ 'nin sabit olduğu sonucuna varırız. Ve kaynak için akım fonksiyonunu,

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta + C \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada m kaynak şiddeti, C ise sabit bir sayıdır. Hız alaları ψ 'nin türevinden elde edildiğinden değerinin ne olduğunun önemi yoktur. Kaynak için potansiyel fonksiyonu bulmaya çalışalım. Bunun için radyal yöndeki hız tanımından yararlanırsak,

$$q_r = \frac{m}{2\pi r} = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

olarak yazılabilir. Ve inteğre edilerek,

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r + F(\theta) \quad (3.11)$$

bulunur. $F(\theta)$ 'yı bulmak için teğetsel hızın potansiyel tanımından yararlanırsak,

$$q_\theta = \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

olarak tanımlandığı için

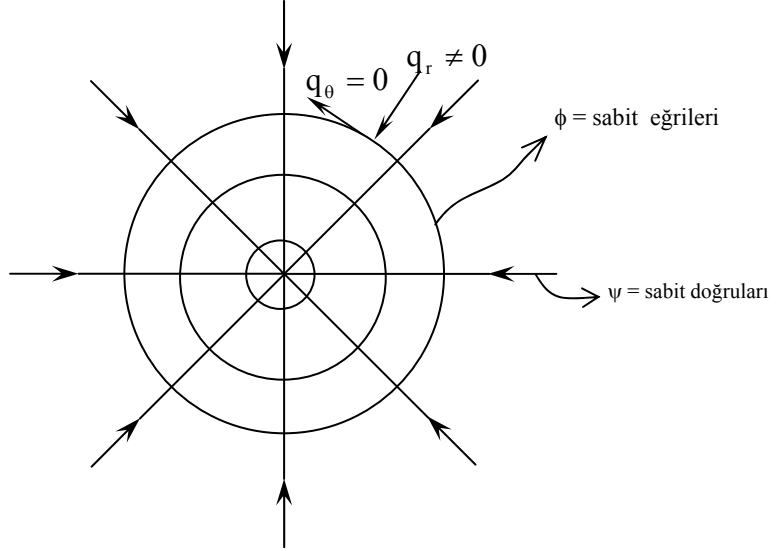
$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = F'(\theta) = 0$$

olacağından kaynak için potansiyel fonksiyonu,

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r + C \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

$m > 0$ halinde (3.10) ve (3.12) formulleri başlangıç noktasındaki kaynağı, $m < 0$ olması halinde başlangıç noktasındaki kuyuyu temsil eden formüllerdir.



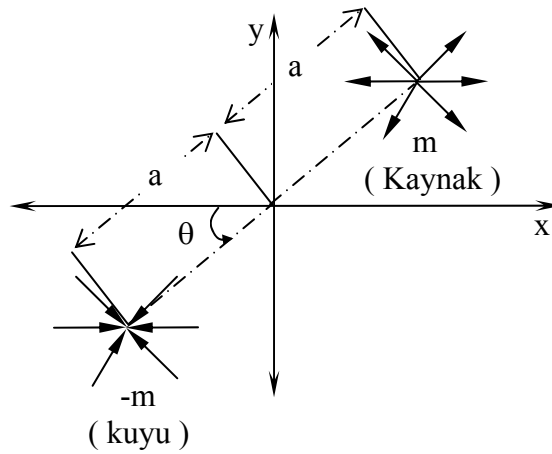
Şekil 3.4 merkezde kuyu

3.3 DUBLE

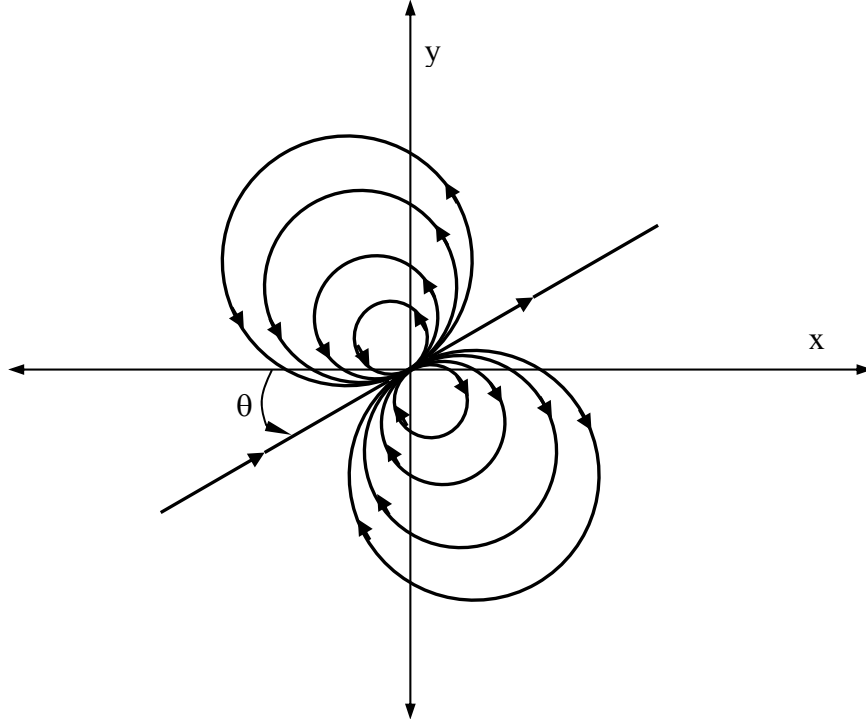
Başlangıç noktasında yer alan μ şiddetindeki ve eksenini reel eksenle θ açısı yapmış duple, bu eksen üzerinde simetrik konumda yer alan eşit şiddetteki bir kaynakla, bir kuyunun birbirine çok yaklaştırılması suretiyle elde edilebilir.

$$\mu = 2ma \quad (3.13)$$

$$\text{duble} = \lim_{2a \rightarrow 0} (\text{kanak} + \text{kuyu}) \left\{ \begin{array}{l} (\mu = 2ma \rightarrow \text{sonlu}) \text{ duple elde edilir.} \end{array} \right.$$



Şekil 3.5 merkeze a mesafedeki kaynak ve kuyu



Şekil 3.6 merkezde yatay eksenle θ açısı yapmış duble

Duble için akım ve potansiyel fonksiyonları,

$$\psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{r} \quad (3.14)$$

$$\phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{r} \quad (3.15)$$

olarak ifade edebilir.

3.4 VORTEKS (NOKTASAL GİRDAP)

Başlangıç noktasında yer alan sabit sirkülasyonlu bir noktasal girdabın oluşturduğu akım alanında radyal hızlar sıfır olup, akım çizgileri eş merkezli dairelerden ibarettir(Şekil 3.7). Sirkülasyonun değeri Γ ve saat ibrelerine zıt yön pozitif olmak üzere,

$$\Gamma = q_{\theta} 2\pi r$$

(3.16)

ve buradan teğetsel hız için

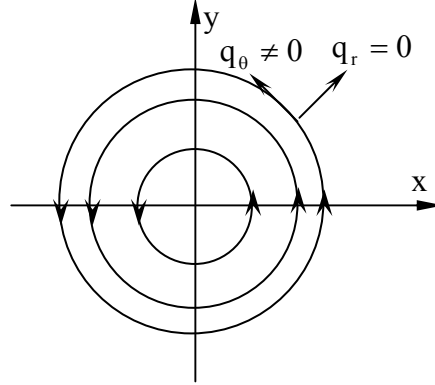
$$\vec{q}_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.17)$$

yazmak mümkündür. Kaynak için yapılabenzer şekilde polar koordinatlarda q_r ve q_θ hız bileşenlerini ϕ ve ψ fonksiyonlarına bağlayan bağıntılardan integral olarak

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C \quad (3.18)$$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C \quad (3.20)$$

potansiyel ve akım fonksiyonunu elde edebiliriz.



Şekil 3.7 noktasal girdap

Daire üzerindeki birim $d\vec{l}$ uzunluğunu,

$$d\vec{l} = r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta = ds \cdot \vec{e}_\theta \quad (3.21)$$

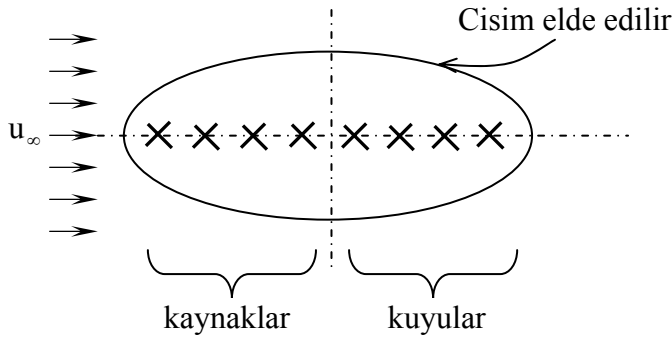
şeklinde yazarsak, sirkülasyonu,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} d\vec{l} = \oint_C q_\theta r d\theta = \oint_C \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} 2\pi = \Gamma \quad (3.22)$$

şeklinde bulabiliriz. Demek ki kapalı bir C eğrisi üzerinde sirkülasyon sabit kalmaktadır.

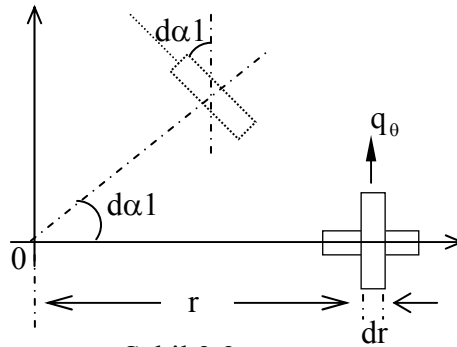
Merkezi içine almayan herhangi bir eğri üzerinde hesaplanan dolaşım sıfırdır. Bir çok karmaşık akım, basit tekilliklerin ve düz akımın süperpozisyonu ile elde edilebilir.

Örnek:



Şekil 3.8: Değişik akım alanlarının birleşimiyle cisim elde edilmesi

Girdap hareketinin girdap merkezi hariç olmak üzere neden çevresiz olduğuna bakalım. Birbirine dik akışkan kolonları düşünelim.(şekil 3.9) dt zaman sonra bu kolonlar $d\alpha_1$ pozisyonunda şekildeki gibi olacaklardır.



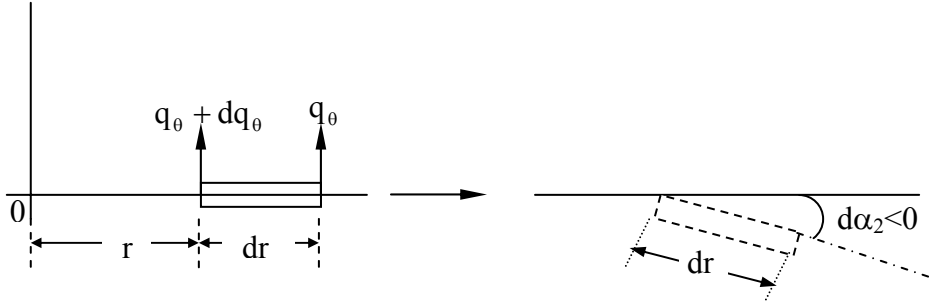
Şekil 3.9

Önce düşey akışkan kolonunu düşünelim.

$$d\alpha_1 = \frac{q_\theta \cdot dt}{r} \quad (r \cdot d\alpha_1 = q_\theta \cdot dt = ds) \quad (3.23)$$

$$d\alpha_1 = \frac{C}{r} \frac{dt}{r} = \frac{C}{r^2} dt \quad (3.24)$$

Sonra yatay akışkan kolonunu düşünelim.



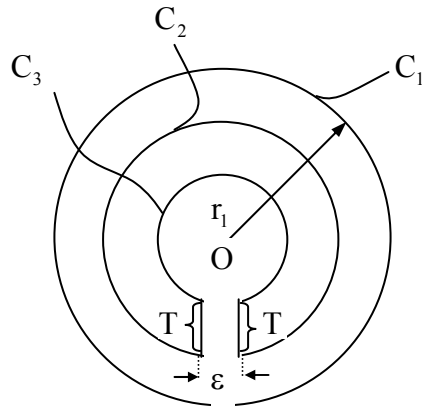
Şekil 3.10

$$dr \cdot d\alpha_1 = dq_0 \cdot dt = ds \rightarrow d\alpha_2 = \frac{dq_0}{dr} dt \quad (3.25)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r^2} - \frac{c}{r^2} \right) = 0 \quad (3.26)$$

$$\Gamma = \int_{\text{yüzey}} 2 \vec{w} \cdot d\vec{s} \quad \begin{array}{l} ds = \text{alan} \\ w = \text{çevri vektörü} \end{array}$$

Noktasal girdap hareketinde bütün çevri merkez noktasın da konsantre olmuştur. O noktası dışında akım çevrisizdir. O'yu dışarıda bırakan C kapalı eğrisi üzerinde dolaşım sıfırdır. Bunu Şekil 3.11 üzerinde gösterelim.



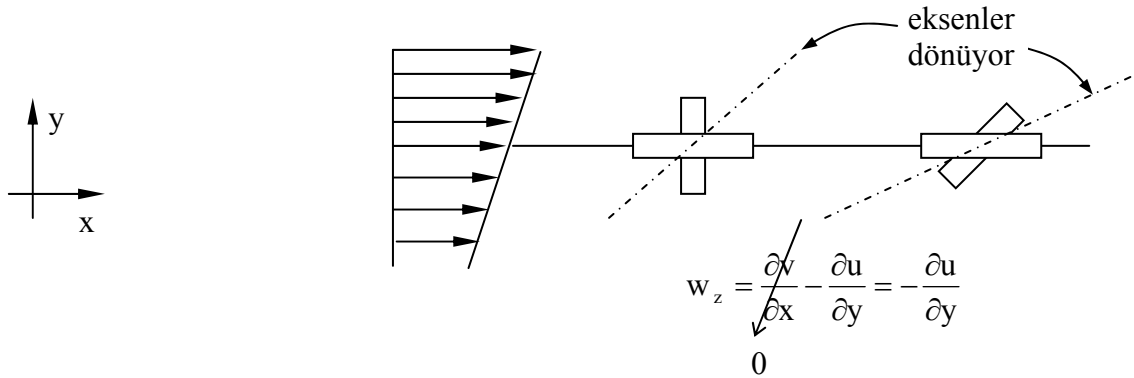
Şekil 3.11

$$\Gamma_{c_1} = \oint_{c_1} \vec{q}_1 \cdot d\vec{l} = \oint_{c_1} \frac{\Gamma}{2\pi r_1} r_1 d\theta = \Gamma$$

$$\begin{aligned} \Gamma_C &= \Gamma_{C_2} + \int_T \underbrace{\vec{q}_1 \cdot d\vec{l}}_0 + \Gamma_{C_3} + \int_T \underbrace{\vec{q}_1 \cdot d\vec{l}}_0 = \Gamma_{C_2} + \Gamma_{C_3} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi r_2} r_2 \cdot 2\pi + \frac{\Gamma}{2\pi r_3} r_3 \cdot (-2\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma_C = \Gamma - \Gamma = 0$$

Örneğin çevrili (potansiyel olmayan) harekette yatay ve akışkan sütunlarını dt zaman sonra incelersek, bu kolonların açılı ortaylarının döndüğünü görürüz (Şekil 3.12). Buradan bu akışkan hareketinde çevrinin var olduğu sonucuna varırız.



Şekil 3.12

4. KOMPLEKS POTANSİYEL VE KOMPLEKS EŞLENİK HIZ

Bir analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısımları ayrı ayrı laplace denklemini sağlar. Bir potansiyel akım alanında potansiyel ve akım fonksiyonları harmonik fonksiyon oldukları ve

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

şeklindeki Cauchy-Riemann şartlarını sağladıkları bilinir. O halde bu iki fonksiyonu

$$F(z, t) = \phi(z, t) + i\psi(z, t) \quad (4.1)$$

şeklinde verilen bir analitik fonksiyonun reel ve imajiner kısımları olarak yazmak mümkündür. Bu analitik fonksiyon kompleks potansiyel olarak adlandırılır.

Kompleks potansiyelin z 'ye göre türevi x yönünden yaklaşırsak;

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (4.2)$$

y yönünden yaklaşırsak;

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -i \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Veya u ve v Kartezyen koordinatlarda hız bileşenleri olmak üzere

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (4.3)$$

olduğunu hatırlarsak

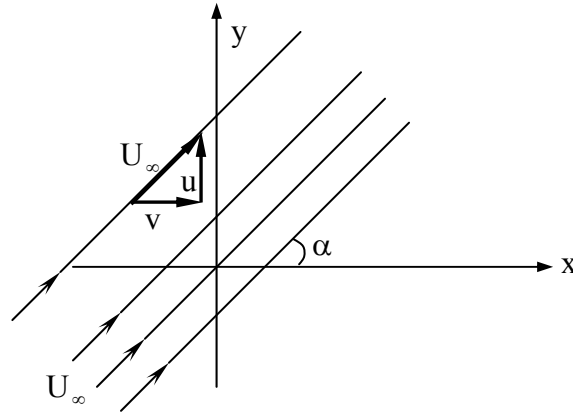
$$w(z, t) = \frac{\partial F}{\partial z} = u - i v \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir. Bu son ifadedeki w , akım alanının herhangi bir noktasındaki u ve v hız bileşenlerinin

$$w(z, t) = u - i v \quad (4.5)$$

şeklinde kompleks bir ifadenin eşleniği olup, kompleks eşlenik hız adını adı verilir. O halde, herhangi bir $F(z)$ analitik fonksiyonu bir potansiyel alanı temsil eder. Fonksiyonun z 'e göre türevi ise bu akım alanı içindeki hızları tanımlamaya yeterlidir. Daha evvel gördüğümüz temel çözümlerin kompleks fonksiyonlarını elde edelim.

4.1 Düz Akış



Şekil 4.1: Düz akım

x eksenine ile α açısı yapan U_∞ hızındaki uniform paralel akımı göz önüne alalım. Reel ve imajiner eksenler doğrultusundaki hız bileşenleri u ve v olmak üzere

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

bağıntıları yazılabilir. Diğer taraftan kompleks potansiyelini,

$$F(z) = \phi(z, t) + i\psi(z, t)$$

şekinde tanımlandığı hatırlanırsa, hız bileşenleri için verilen bağıntılardan integre edilerek ϕ ve ψ değerleri bulunur ve kompleks fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$F(z) = (ux + vy) + i(uy - vx) = (u - iv)(x + iy) \quad (4.6)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan da,

$$z = x + iy \quad u = U_{\infty} \cos \alpha \quad v = U_{\infty} \sin \alpha \quad (4.7)$$

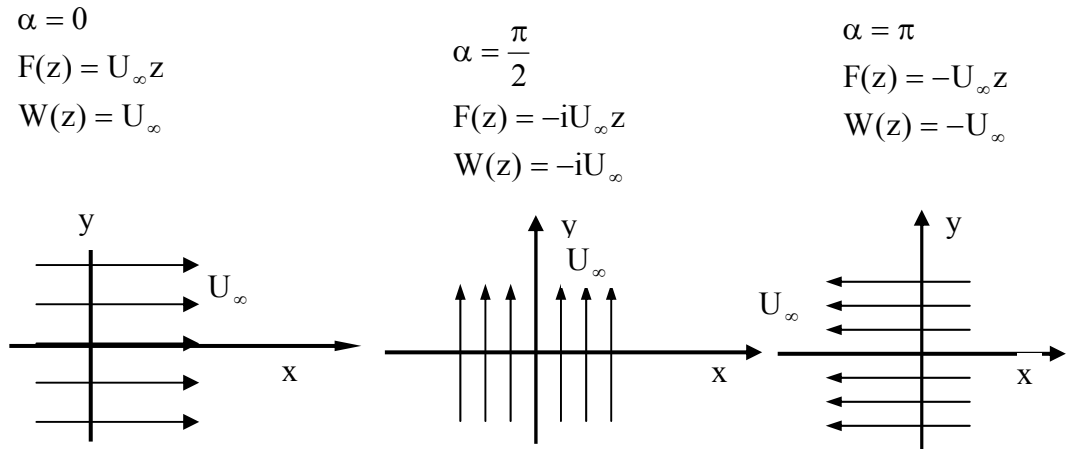
olduğu hatırlanarak

$$F(z, t) = U_{\infty} z e^{-i\alpha} \quad (4.8)$$

elde edilebilir. Kompleks hız da türev alınarak,

$$w = U_{\infty} e^{-i\alpha} \quad (4.9)$$

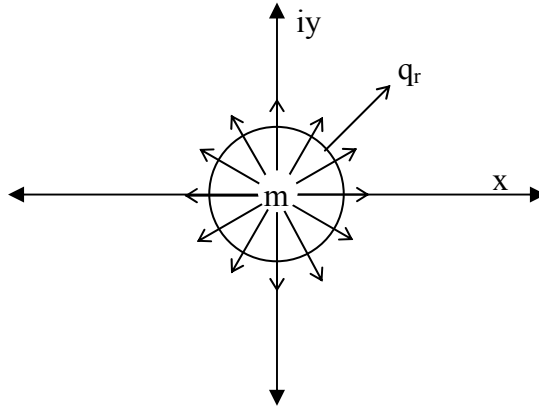
şeklinde bulunur. α 'nın çeşitli değerleri için özel olarak reel ve imajiner eksene paralel akım tipleri elde edilebilir.



Şekil 4.2 Değişik yönde üniform-paralel akımlar

4.2 Kaynak veya Kuyu:

a-) Merkezde



Şekil 4.3: Merkezde kaynak

Kartezyen koordinatlarda akım ve potansiyel fonksiyonları,

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r + C$$

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta + C$$

olarak elde etmiştik. Bu iki fonksiyonu birleştirerek kompleks potansiyel fonksiyonu

$$F(z) = \phi(z, t) + i\psi(z, t) = \frac{m}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{m}{2\pi} \ln r e^{i\theta} \quad (4.10)$$

ve ayrıca

$$z = r e^{i\theta}$$

olduğunu hatırlarsak

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir. Kompleks eşlenik hız da bu bağıntıdan türev alınarak,

$$w(z) = \frac{m}{2\pi z} \quad (4.12)$$

şeklinde elde edilir.

b-) $z = z_0$ da kaynak

z düzleminin başlangıç noktası dışındaki herhangi bir z_0 noktasındaki bir kaynak veya kuyunun yarattığı akıma ait kompleks potansiyel fonksiyonu ve kompleks eşlenik hızı yukarıdaki bağıntılardan bir eksen kaydırılması yoluyla elde edilebilir. Bu amaçla z_0 noktasını başlangıç noktası kabul eden ve eksenleri z düzleminin eksenlerine paralel olan yeni bir $z_1(x_1, iy_1)$ kompleks düzlemi göz önüne alınırsa (Şekil 4.4), ele alınan kaynak bu yeni düzlemin başlangıç noktasında yer aldığından, kompleks potansiyel fonksiyonu kolaylıkla

$$F(z_1) = \frac{m}{2\pi} \ln z_1 \quad (4.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca her iki düzlem arasında

$$z_1 = z - z_0 \quad (4.14)$$

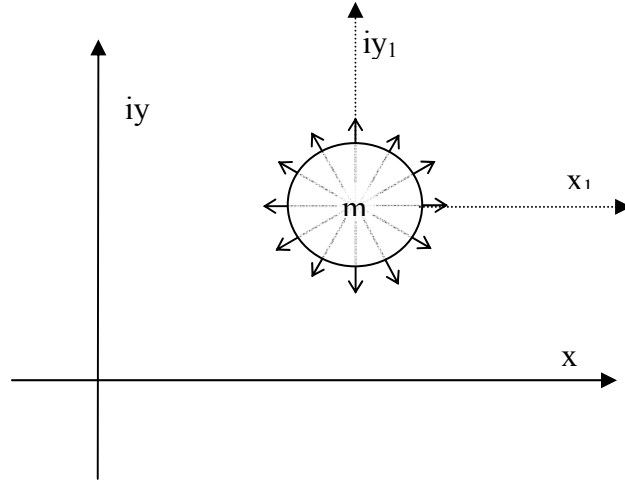
bağıntısı yazılarak kompleks potansiyel

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (4.15)$$

şeklinde ve kompleks eşlenik hız da, yine türev alınarak,

$$w(z) = \frac{m}{2\pi(z - z_0)} \quad (4.16)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 4.4 Merkez dışında bir kaynak

Yukarıda çıkartılan bu formüller, $m > 0$ halinde kaynağı, $m < 0$ olması halinde de kuyuyu temsil etmektedir.

4.3 Noktasal Girdap

Kartezyen koordinatlarda akım ve potansiyel fonksiyon için

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C$$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C$$

bağıntıları elde etmiştik. Bu bağıntıları birleştirerek kompleks potansiyel fonksiyonu

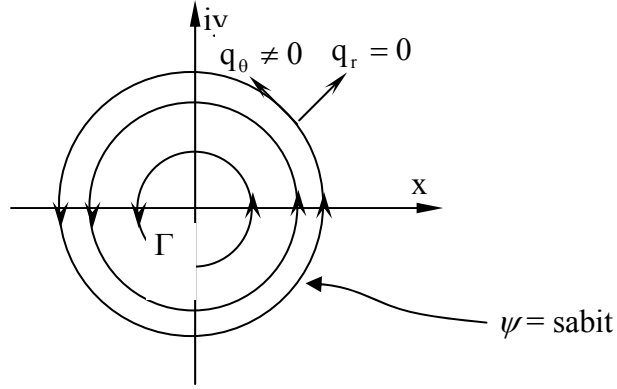
$$F(z) = \phi(z, t) + i\psi(z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta + i \ln r) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r e^{i\theta} \quad (4.17)$$

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir. Türev olarak kompleks eşlenik hızı da

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (4.19)$$

şeklinde buluruz.

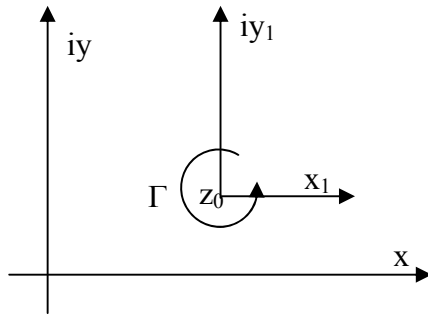


Şekil 4.5 noktasal girdap

z düzleminin herhangi bir z_0 noktasındaki girdap (Şekil 4.5), yine kaynak hareketine benzer şekilde bir eksen kaydırılmasıyla

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilir. $\Gamma < 0$ olması saat yönündeki bir girdabı temsil eder.



Şekil 4.6: z_0 noktasında girdap

4.4 Başlangıç Noktasında Duple

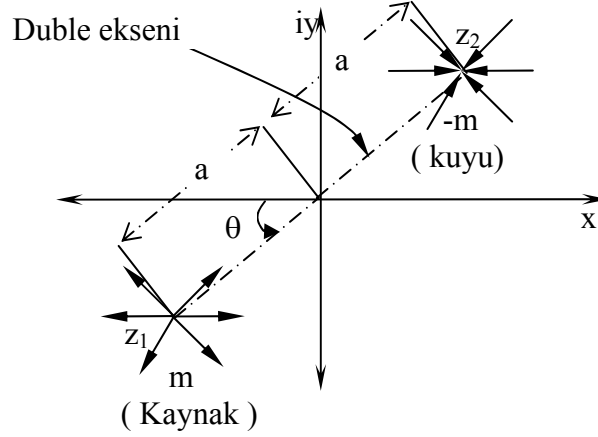
Daha öncede belirttiğimiz gibi duple birbirine eşit şiddetteki kaynak ve kuyunun bir birine çok yaklaştırılması ile elde ediliyordu. Şöyle ki; Şekil 4.7’de görüldüğü gibi sırasıyla

$$z_1 = ae^{i(\pi+\theta)} = -ae^{i\theta}, \quad z_2 = ae^{i\theta}$$

noktalarında yer alan m şiddetindeki bir kaynakla, yine aynı şiddetteki bir kuyu, aralarındaki uzaklıkla şiddetlerinin çarpımı

$$\mu = 2ma \quad (4.21)$$

şeklinde dublenin şiddetini verecek ve sabit kalacak şekilde tutulurken, bir birine yaklaştırılırlar, ve limitte $2a \rightarrow 0$ olduğunda duple elde edilir. Bu amaçla kaynak ve kuyunun kompleks potansiyel fonksiyonları

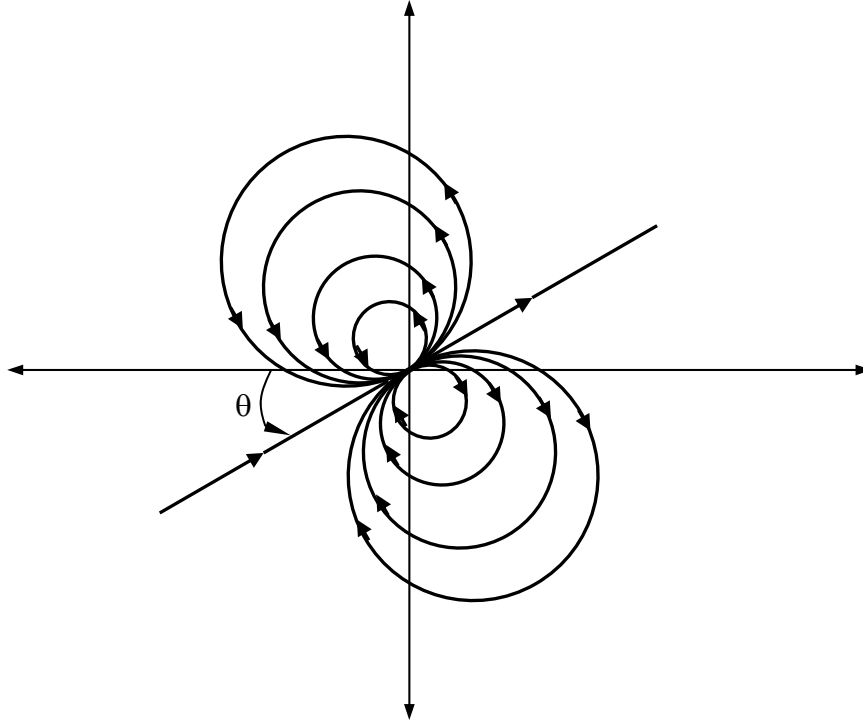


Şekil 4.7: kaynak + kuyu akımı

$$F_1(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_1) = \frac{m}{2\pi} \ln(z + ae^{i\theta}) \quad (4.22)$$

$$F_2(z) = -\frac{m}{2\pi} \ln(z - z_2) = -\frac{m}{2\pi} \ln(z - ae^{i\theta}) \quad (4.23)$$

şeklinde yazılarak birleştirilirse,



Şekil 4.8: Merkezde θ açılı duble

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \frac{m}{2\pi} [\ln(z + ae^{i\theta}) - \ln(z - ae^{i\theta})] \quad (4.24)$$

veya $m = \frac{\mu}{2a}$ yazılarak limit alınırsa

$$F(z) = \frac{m}{4\pi} \lim_{2a \rightarrow 0} \frac{[\ln(z + ae^{i\theta}) - \ln(z - ae^{i\theta})]}{a} = \frac{0}{0}$$

olduğu görülür. Belirsizliği gidermek için ifadenin pay ve paydasının ayrı ayrı a 'ya göre türevleri alınarak Hospital kuralı uygulanırsa,

$$F(z) = \frac{m}{4\pi} \lim_{2a \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{i\theta}}{z + ae^{i\theta}} - \frac{-e^{i\theta}}{z - ae^{i\theta}}}{1} = \frac{\mu e^{i\theta}}{2\pi z} \quad (4.25)$$

elde edilir. Kompleks eşlenik hızda türev alınarak,

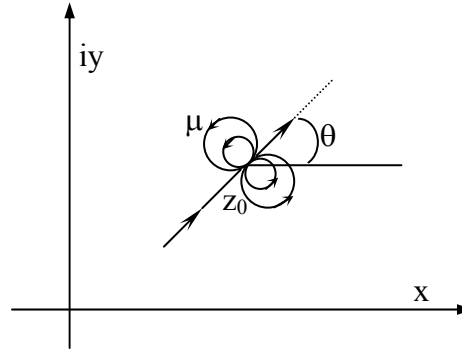
$$w(z) = \frac{\mu e^{i\theta}}{2\pi z^2} \quad (4.26)$$

şeklinde bulunur. θ 'nın çeşitli değerleri seçilerek dublenin eksenini istenildiği gibi döndürülebilir. Örneğin $\theta = 0$ için reel eksene paralel olan bir duble, $\theta = \pi/2$ için imajiner eksene paralel bir duble elde edilir.

Herhangi bir z_0 noktasında yer alan dublenin (Şekil 4.9) kompleks potansiyeli yine eksen kaydırma yoluyla

$$F(z) = \frac{\mu e^{i\theta}}{2\pi(z - z_0)}$$

şeklinde bulunabilir.



Şekil 4.9 z_0 noktasında duble