© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

6. İDEAL (SÜRTÜNMESİZ) AKIŞLAR

6.1. Euler Denklemi

Tüm gerçek akışkanların bir viskozitesi vardır. Ancak akışkanlar mekaniğinde birçok problemin çözümünde viskozitenin ihmal edilerek araştırılması sık sık başvurulan bir yoldur. Bu durumda analiz daha kolaylaşır. Çünkü kayma gerilmeleri söz konusu değildir. Sıkıştırılamaz akışlar için verilen Navier – Stokes denkleminde $\mu = 0$ alınırsa,

$$\rho \frac{D\tilde{V}}{Dt} = \rho\tilde{g} - \tilde{\nabla}P$$

Euler denklemi olarak bilinen sürtünmesiz akışa ait genel denklem elde edilir. Eğer 'z' koordinatı düşey ekseni temsil ederse (pozitif yön yukarı doğru olmak üzere);

$$\tilde{\nabla}z = \tilde{\delta}_k$$

$$\rho\tilde{g} = -\rho g\tilde{\delta}_k = -\rho g\tilde{\nabla}z$$

Bu durumda Euler denklemi;

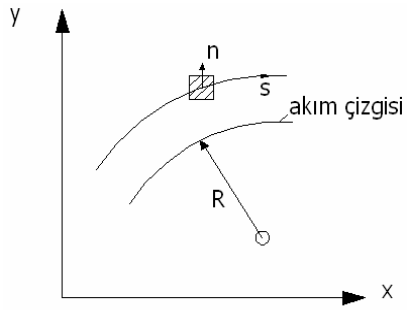
$$\rho \frac{D\tilde{V}}{Dt} = -\rho\tilde{g}\tilde{\nabla}z - \tilde{\nabla}P$$

veya,

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \left(\tilde{V}.\tilde{\nabla}\right)\tilde{V} = -\rho g\tilde{\nabla}z - \frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}P$$

formunda yazılabilir.

6.1.1. Euler denkleminin akım çizgisi boyunca integrali ve Bernoulli denklemi



Şekil 6.1. Akım çizgisine ait koordinatların gösterimi

Kararlı bir akış için akım çizgisi ve yörünge çizgisi aynı olduğundan akım çizgisi boyunca hareket eden bir ideal partikülün denklemi;

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s}-g\frac{\partial z}{\partial s}=V\frac{\partial V}{\partial s}$$

şeklindedir. Eğer akışkan partikülü akım çizgisi üzerinde *ds* kadar yol alırsa; basınç, hız ve yükseklikte *ds* boyunca değişimler,

$$\frac{\partial P}{\partial s}ds=dP\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}ds=dz \text{ ve}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s}ds=dV$$

bağıntılarıyla verilir. Bu durumda yukarıdaki denklem *ds* ile çarpılır ve terimler sadeleştirilirse;

$$-\int\frac{dP}{\rho}-\int gdz=\int VdV$$

bağıntısıdan, akım çizgisi boyunca sabit bir değere sahip,

$$\int\frac{dP}{\rho}+gz+\frac{V^2}{2}=sabit$$

denklem elde edilir. Eğer akış sıkıştırılamaz ise ($\rho=c$);

$$\frac{P}{\rho}+gz+\frac{V^2}{2}=c$$

şeklinde elde edilen denklem 'Bernoulli Denklemi' adını alır. Denklemin kullanımında dikkat edilmesi gerekli sınırlamalar şunlardır:

a) kararlı akış,
b) sıkıştırılamaz akış,
c) sürtünmesiz akış
d) akım çizgisi boyunca akış.

6.1.2. Euler denkleminin akım çizgisi normali boyunca integrali

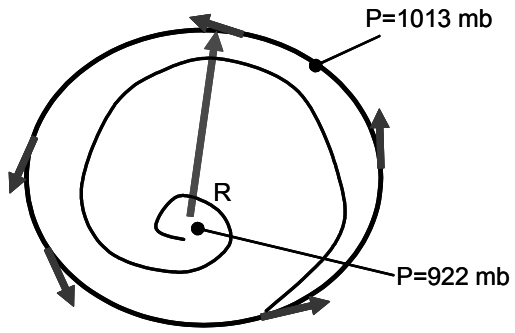
Akım çizgisi normali boyunca, yerçekimi kuvveti ihmal edildiğinde;

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial n}-g\frac{\partial z}{\partial n}=a_n=-\frac{V^2}{R}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial n}=\frac{V^2}{R}$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

denklemi elde edilir (*R*: eğrilik yarıçapı). Bu denkleme göre; basınç, akım çizgisi eğrilik merkezinden uzaklaştıkça artar. Denklemin uygulandığı akışlara örnek olarak; hortum, tayfun gibi şiddetli hava hareketlerinin ortaya çıktığı akışlar gösterilebilir. Bu tür durumlarda, merkezdeki düşük basınçtan dolayı ortaya çıkan vakum etkisi, akışta girdap etkisi yaratır. Eğrisel kanallardaki akışlarda ise, dış cidarlara yaklaştıkça yükselen basınçtan dolayı, ikincil akışlar ortaya çıkar. Eğer akım çizgileri düz ise, eğrilik yarıçapı sonsuza gideceğinden basınç değişimi sıfıra gider.



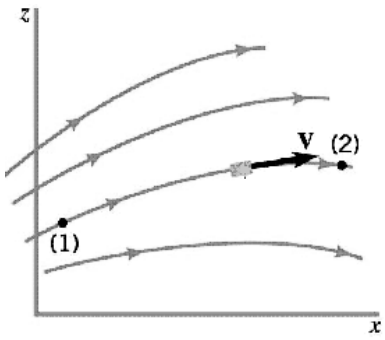
Şekil 6.2. Eğrilik merkezinden uzaklaştıkça basıncın artışı

6.2. Bernoulli Denklemi

Bernoulli denklemi türetiminin yapıldığı sınırlamalara bağlı kalmak şartı ile akım çizgisi üzerinde herhangi iki nokta arasında basınç-hız ilişkisinin bulunmasında kullanılabilir. Şekilde gösterilen aynı akım çizgisi üzerindeki 1 ve 2 noktaları için geçerli denklem;

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^{\,2}}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^{\,2}}{2}+gz_2$$

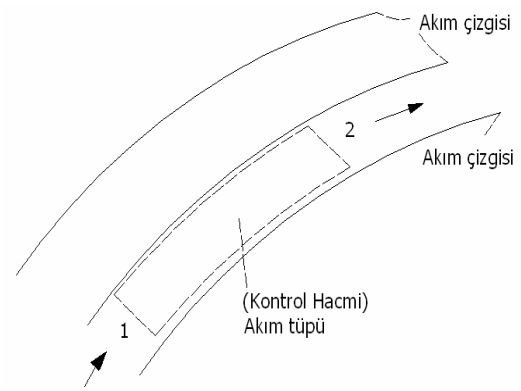
şeklindedir.



Şekil 6.3. Aynı akım çizgisi üzerindeki 1 ve 2 noktalarının gösterimi

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

6.2.1. Termodinamiğin I. Kanunu ve Bernoulli Denklemi Arasındaki İlişki



Şekil 6.4. Akım çizgileri tarafından sınırlanmış kontrol hacmi (akım tüpü) kavramı

Sürtünmesiz – kararlı bir akış durumunda; şekilde gösterilen akım çizgileri ile sınırlanmış bir kontrol hacmi (akım tüpü) için, Termodinamiğin I. Kanununa ait;

$$\dot{E}_g - \dot{E}_ç + \dot{E}_ü = \frac{d\dot{E}_s}{dt}$$

temel denkleminin açılımı,

$$\dot{Q} - W + \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) - \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Denklemdeki entalpi değeri,

$$h = u + pv = u + \frac{p}{\rho}$$

olmak üzere, yukarıdaki denklemin elde edilmesinde yapılan kabuller şunlardır:

a) Kararlı akış $\left(\frac{d}{dt} = 0 \right)$

b) Sürtünmesiz akış $\left(E_ü = \dot{W}_{kayma} = 0 \right)$

c) Sıkıştırılamaz akış ($v_1 = v_2 = \frac{1}{\rho}$)

d) Üniform akış ve akışkan özellikleri (V=c her kesit alanı için)

e) $\dot{Q} + (u_1 - u_2) + \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$

f) $\dot{Q} + (u_1 - u_2) = 0$

şeklindedir. Sonuç olarak,

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=c$$

enerji denklemi yapılan bazı kabuller sonrası Bernoulli denklemini vermektedir. Ancak bu iki denklem farklı yaklaşım ve kabuller altında türetildiği üzere, birbirinden bağımsız iki denklem olup, sadece özel durumlarda aynı sonucu vermektedir. Termodinamiğin I. Kanununun bu özel konumu akışta herhangi bir mekanik enerji kaybı olmadığını göstermektedir. Akışın mekanik enerji seviyesini gösterebilmek açısından denklem toplam enerji potansiyeli (*H*) cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=H=sabit$$

Kararlı, sıkıştırılamaz ve sürtünmesiz bir akışın akım çizgisi boyunca hareketinde;

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+z=c$$

ifadesinde "*c*" değeri akım çizgisinden akım çizgisine göre farklı değerler alır. Ancak bu sınırlamalara ek olarak; akış bir de irrotasyonel (döngüsüz) olursa, Bernoulli denklemi aynen geçerli olup "c" değeri tüm akım çizgileri için aynı değeri alır.

6.2.2. Kararsız akışlar için Bernoulli denklemi

Akım çizgisi boyunca kararsız akış denkleminin türetimi için; $\rho=c$, $\mu=0$ ve akım çizgisi boyunca akış kabulleri altında,

$$\left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s}-g\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s}\right\}ds$$

veya

$$\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}ds+\int_1^2\frac{dP}{\rho}+\left.\frac{V^2}{2}\right|_1^2+gz\Big|_1^2=0$$

ara işlemlerini takiben,

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}ds$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü için, hızın zamana göre değiminin, yani *V*=*V*(t) bağıntısının bilinmesi gereklidir.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

6.3. Potansiyel (ideal) akış teorisi ve iki boyutlu potansiyel akış

Bir akış sıkıştırılamaz, viskozitesiz ve kararlı olmasının yanında, eğer döngüsüz (irrotasyonel) ise, bu tür akışlara 'potansiyel akış' adı verilir. Potansiyel akışlar pratikte yoğun kullanımı dışında, sunduğu matematiksel kolaylıklar nedeniyle de önemlidir. Potansiyel akış analizlerinde genellikle iki boyutlu akışlar ön plana çıkmaktadır. Bu nedenle bu kısımda iki boyutlu potansiyel akış teorinse yönelik kavram ve teoriler irdelenecektir.

6.3.1. Akım Fonksiyonu

Akım fonksiyonu $\psi(x,y,t)$; iki boyutlu akışta hız bileşenleri $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ yerine kullanılır. İki boyutlu, kararlı ve sıkıştırılamaz bir akışta; akım çizgileri ve süreklilik denklemi arasındaki ilişkiden yararlanarak ağıdaki şekilde formüle edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u)=\frac{\partial}{\partial y}(v)$$

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y};\ v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

olmak üzere;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

süreklilik denklemindeki eşitlik akım fonksiyonu cinsinden sağlanmış olur. Akım fonksiyonunun bazı önemli özellikleri şunlardır:

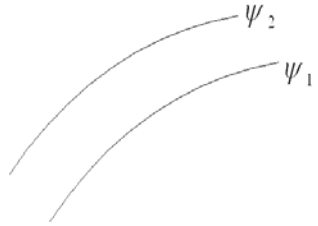
i) Kararlı akış şartlarında, akım çizgisi üzerinde $\psi = sabit$ şartı geçerlidir. Bu durum,

$$udy - vdx = 0 \Rightarrow d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0$$

denklemi ile temsil edilir.

ii) Kararlı akış şartlarında, iki farklı akım çizgisi arasındaki fark, akış debisini verir.

$$Q = \psi_2 - \psi_1$$



6.3.2. Hız Potansiyeli

Hız potansiyeli (ϕ), döngüsüz (irrotasyonel) bir akıştaki hız alanı dikkate alınarak tanımlanmıştır. İrrotasyonel akış için;

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\nabla} x \widetilde{V} = 0$$

olduğundan; bu tanıma uyan koordinat ve zamanın fonksiyonu olan ve bu parametrelere bağlı 1. ve 2. türevi bulunan skaler bir fonksiyon mutlaka mevcuttur. Bu skaler fonksiyon "ϕ" ile gösterilir ve akışın pozitif yönü bu fonksiyonun azalma yönü olarak alınırsa hız vektörü cinsinden;

$$\widetilde{V} = (-)\widetilde{\nabla}\phi$$

tanımlaması yapılır. $\phi(x, y, t)$ fonksiyonu; hız potansiyeli adını alır. İki boyutlu ve kararlı bir akış için;

$$u\widetilde{\delta}_x + v\widetilde{\delta}_y = \left(\widetilde{\delta}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \widetilde{\delta}_y \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla;

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}; v = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

elde edilir. Denklemdeki negatif işaret, hız potansiyelinin sadece azalan yönde olduğunu göstermektedir. Fiziksel anlamı bilmek kaydıyla, pozitif işaret de kullanılabilir ve literatürde bu durum daha yaygındır. Bu nedenle, aşağıda verilen analizlerde hız potansiyeli için pozitif işaret kullanılmaktadır.

6.3.3. Laplace denklemi ve Cauchy – Riemann

Akım fonksiyonu ile hız potansiyeli büyüklükleri; iki boyutlu, kararlı, sıkıştırılamaz ve döngüsüz bir akış için gerekli koşulları sağlarken, Laplace denklemini oluştururlar. Örneğin süreklilik denkleminden türetilen akım fonksiyonuna ait,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

denklemleri, döngüsüz (irrotasyonel) akış koşulu uygulandığında,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

Laplace denklemi ortaya çıkar. Benzer şekilde, irrotasyonel akış şartı kullanılarak türetilen hız potansiyeline ait,

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}; v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

denklemleri de süreklilik denklemini,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

uyarınca sağlarken yine Laplace denklemi oluşur. Sonuç olarak; Laplace denklemini oluşturan herhangi ψ ve ϕ fonksiyonları, aynı zamanda, iki boyutlu, kararlı, sıkıştırılamaz ve irrotasyonel akışı temsil eder. Yine ψ ve ϕ fonksiyonları için yukarıda çıkarılan bağıntılar uyarınca,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda, Laplace denklemini oluşturan bu iki fonksiyon için gerekli Cauchy – Riemann şartları da,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \; -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

şeklinde sağlanmış olur.

6.3.4. Akım fonksiyonu ve hız potansiyeli eğrilerinin eğimi

Akım çizgisi boyunca akım fonkiyonu sabit bir değere sahip olduğundan;

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial x} dy = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = -\frac{(-v)}{u} = \frac{v}{u}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{v}{u}$$

Benzer şekilde hız potansiyel eğrisi boyunca,

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = -\frac{(u)}{v} = -\frac{u}{v}$$

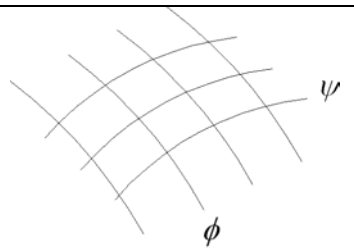
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{u}{v}$$

elde edilir. İki eğriye ait eğimlerin çarpımı,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} . \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -1$$

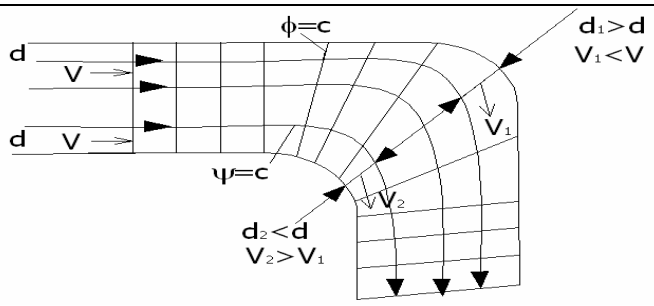
olduğundan, ψ ve ϕ düzlemde birbirine dik iki eğriyi temsil eder. Bu iki eğrinin diklik özelliği iki boyutlu potansiyel akışların grafiksel analizinde büyük kolaylıklar sağlar.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.



Şekil 6.5. Akım fonksiyonu ve hız potansiyeli eğrilerinin diklik özelliği

Bu duruma örnek olmak üzere, Şekil 6.6'da gösterilen ve bir eğrisel dirsek içeren kanal içi akışı göz önüne alalım. $\phi = c$ ve $\psi = c$ eğrileri birlikte bir akış filesi oluştururlar. Bu durum akış gözlemlenmesinde oldukça önemlidir. Hızlar bu akış filesinden tahmin edilebilir, çünkü akım çizgileri arasındaki mesafe hız ile ters orantılıdır. Şekilde gösterilen akışta, dirsek bölgesinde, iç köşedeki iki akım çizgisi arasındaki mesafe daha küçük olduğundan, bu bölgede hız değeri daha yüksektir.

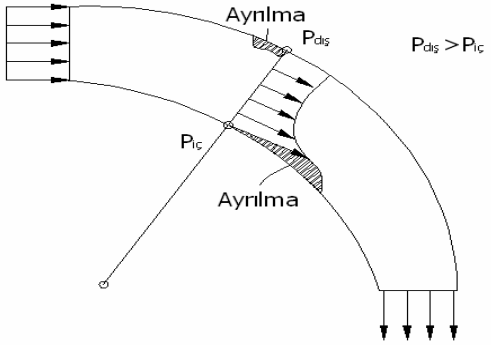


Şekil 6.6. Eğrisel bir dirsekte, akım fonksiyonu ve hız potansiyeli eğrilerinin gösterimi.

Diğer taraftan, akım çizgisine dik yönde elde edilen;

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{V^2}{R}$$

eşitliği ile de, eğrilik merkezinden uzaklaştıkça, Şekil 6.7'de gösterilen dış köşeye doğru basınç daha yüksek olacaktır.Her iki durum, temel akış bölgesine ek olarak yerel özellikte ikincil bir akış (ayrılma) bölgesi oluşmasına sebep olacaktır.



Şekil 6.7. Eğrisel bir dirsekte hız ve basınç profillerinin yaklaşık ölçekte gösterimi.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

6.3.5. Kompleks Potansiyel Fonksiyon

Laplace denklemini oluşturan ve Cauchy-Rieman şartlarını sağlayan, herhangi ψ ϕ fonksiyonları, kompleks sayılar düzleminde,

$$z = x + iy$$

olmak üzere,

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

kompleks potansiyel fonksiyonunu oluştururlar. Bu eşitlikte $\Phi(z)$, z'nin analitik bir fonksiyonu olup, $d\Phi / dz$ seçilen noktalarda tanımlı ve tek bir değere sahip olacaktır. Bu durumda fonksiyonun y=sabit ve x=sabit koşullarındaki türevleri,

$$\frac{d\Phi}{dz} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{y=sabit} = \underbrace{-i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}}_{x=sabit}$$

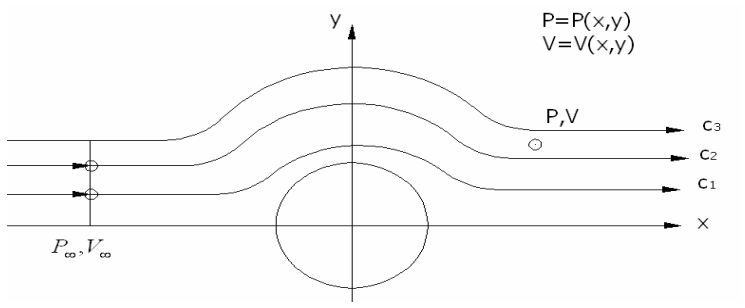
şeklindedir. Mevcut türev $\omega = u + iv$ ile tanımlanabilen kompleks hız ifadesinin eşleniği olan $\varpi = u - iv$ ifadesine eşittir ve potansiyel akış problemlerinin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

6.3.6. Potansiyel akışlarda basınç alanının hesabı

Potansiyel akışlar, kararlı, sıkıştırılamaz ve irrotasyonel akışları temsil ettiğinden, basınç alanının hesabında, iki nokta arasında (kot farkı ihmal edilerek) Bernoulli denkleminin uygulanması yeterlidir:

$$\underbrace{P_\infty + \rho_\infty \frac{V_\infty^{\,2}}{2}}_{\mathrm{P_T}\ \text{biliniyor}} = P + \rho_\infty \frac{V^2}{2}.$$

Bu durum Şekil 6.8'de gösterilmekte olup, akış irrotasyonel olduğundan, Bernoulli denkleminin uygulandığı iki farklı noktanın aynı akım çizgisi üzerinde bulunması gerekli değildir.



Şekil 6.8. Potansiyel akışta basınç alanının hesabına ait parametreler

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Denklemde serbest akış parametrelerinin (ρ_∞, V_∞ ve P_∞) değerleri genellikle bilinmektedir. Hız alanı ise akım çizgisi fonksiyonunun bilinmesiyle,

$$V^2 = u^2 + v^2 = \underbrace{(\partial\psi/\partial y)^2 + (\partial\psi/\partial x)^2}_{\psi=\psi(x,z):\text{ biliniyor}}$$

hesaplanabilecektir. Bu durumda basınç alanı,

$$P = P_\infty + \rho_\infty \left(V_\infty{}^2 - V^2\right)/2$$

denklemi ile bulunabilecektir. Uygulamada basınç alanı yerine, boyutsuz basınç katsayısının (C_p)kullanımı daha yaygındır:

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\rho_\infty V_\infty{}^2/2} = \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty}\right).$$

Bu denkleme dikkat edildiğinde; aynı hızlar alanı için, farklı P_∞ değerleri kullanılarak, farklı basınç alanı elde edilebileceği gözükmektedir. Sadece potansiyel akım teorisine uygun olan bu durum, diğer akış koşullarında gerçekçi değildir.

6.3.7. Silindirik koordinatlarda akım çizgisi ve hız potansiyeli denklemleri

Yukarıda kartezyen koordinatlar için türetilen akım çizgisi fonksiyonu ve hız potansiyeli fonksiyonuna ait denklemler, aynı yöntemin uygulanması suretiyle türetilebilirler. Süreklilik denklemi yardımıyla;

$$\tilde{\nabla}.\tilde{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r.V_r) = -\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

$$r.V_r = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,;\; -V_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

hız bileşenleri ve akım fonksiyou arasındaki ilişki,

$$V_r = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,;\; V_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

denklemleriyle; irrotasyonel akış şart kullanarak elde edilen

$$\tilde{V} = \tilde{\nabla}\phi \Rightarrow V_r\tilde{\delta}_r + V_\theta\tilde{\delta}_\theta = \frac{\partial\phi}{\partial r}\tilde{\delta}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\tilde{\delta}_\theta$$

denklem vasıtasıyla da, hız bileşenleri ile hız potansiyel fonksiyonu arasındaki ilişki,

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,;\; V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

denklemleriyle temsil edilirler. Silindirik koordinatlarda yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r}; V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

olduğu görülür. Kartezyen koordinatlar kısmında gösteridiği üzere, her iki fonksiyon süreklilik denklemi ve irrotasyonel akış şartlarını karşılarken, Laplace denklemini oluştururlar. Ayrıca, Cauchy – Rieman koşullarının,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\partial\phi}{\partial r};-\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

bağıntıları ile sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Daha önce kartezyen koordinatlar için türetilen tüm büyüklüklerin (örneğin, kompleks potansiyel, kompleks hız, basınç alanı), silindirik koordinatlarda da benzer yolla türetilebileceğini bir kez daha vurgulamakta yarar vardır.

6.4. Temel potansiyel akışlar

Potansiyel akış problemlerinin çözümü için, akışa ait kompleks potansiyel fonksiyonun ($\Phi(z)$) bilinmesi yeterlidir. Bu fonksiyonlar temel potansiyel akış sınıfına giren akışlar için belirlenmiş olup, literatürde mevcuttur. Bu kısımda en yaygın temel potansiyel akışlar için $\Phi(z)$ eşitlikleri verilecektir. Çözüm için izlenecek adımları göstermek üzere üniform düzlemsel akışı göz önüne alalım. Bu akışa ait kompleks potansiyel fonksiyon, 'a've 'b' değeri bilinen katsayılar olmak üzere;

$$\Phi(z)=(a+ib)z$$

şeklindedir. Denklem,

$$\Phi(z)=a(x+iy)+ib(x+iy)=ax+aiy+bix-by$$

$$\Phi(z)=\underbrace{(ax-by)}_{\phi(x,y)}+\underbrace{i(ay+bx)}_{\psi(x,y)}$$

şeklinde açılarak akım çizgisi ve hız potansiyeli fonksiyonları; türev alınarak eldeedilecek kompleks hız eşleniğinden ise,

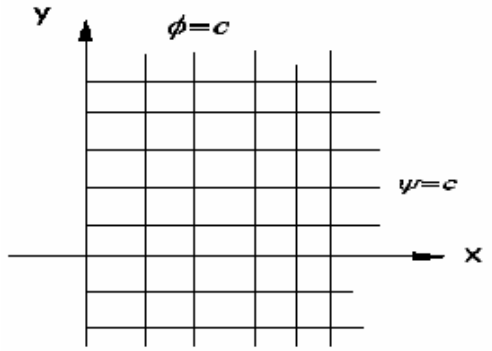
$$\frac{d\phi}{dz}=a+ib=\overline{w}=u-iv$$

$$u=a$$

$$v=-b$$

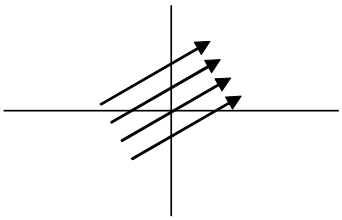
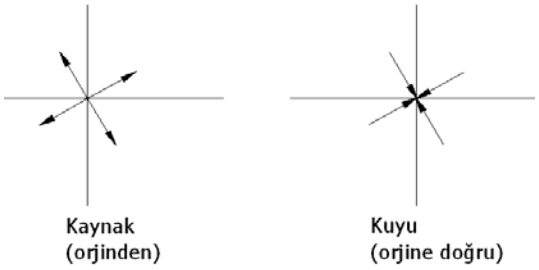
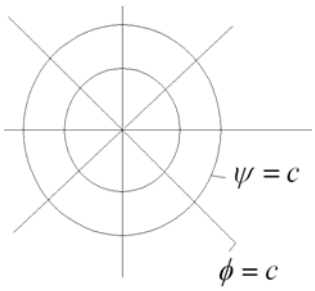
hız bileşenleri bulunabilecektir. Böylece üniform düzlemsel akış için, akım çizgileri ve hız potansiyeli eğrilerini çizmek mümkün olacaktır. Yukarıdaki denklem düzlemsel akış için genel hali (eğimli akışlar dahil) temsil eden bir denklemdir. Şekil 6.8'de özel bir düzlemsel akış hali olarak; yatay yönde (a=u_∞, b=0) üniform hız ile hareket eden akışa ait eğriler gösterilmiştir.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

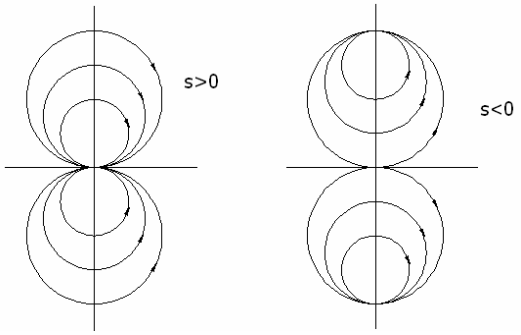
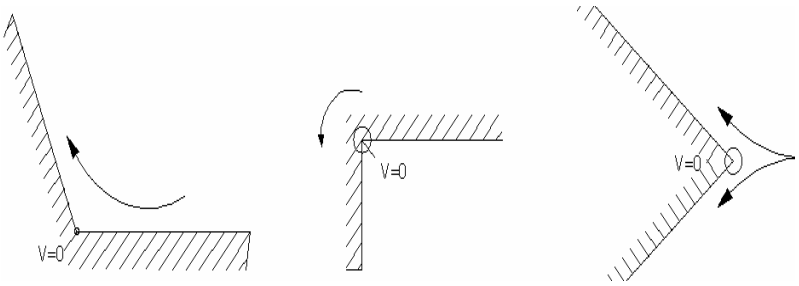


Şekil 6.9. Yatay yönde üniform hızlı düzlemsel akışa ait akım çizgisi ve hız potansiyeli eğrileri.

Temel potansiyel akışlara ait $\Phi(z)$ değerleri aşağıda gösterilmiştir:

Akış türü	$\Phi(z)$
1. Üniform düzlemsel akış 	$\Phi(z) = (a + ib)z$
2. Kaynak-kuyu akışları 	$\Phi(z) = \frac{\mp Q}{2\pi} \ln z$ $+Q$: Kaynak $-Q$: Kuyu
3. Serbest girdap (vorteks) 	$\Phi(z) = \mp \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$ $+\Gamma$: saatin tersi yönünde dönme $-\Gamma$: saat yönünde dönme

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Akış türü	$\Phi(z)$
4. Kaynak ve kuyu akışın aynı noktada birleşimi (Dipol) 	$\Phi(z)=\frac{\mp S}{z}$
5. Köşe ve kenarlardan akış  Konkav köşe (n>1) Konveks köşe (n<1) Kenar akışı (n>1)	$\Phi(z)=\frac{A}{n}z^n$

6.5. Kompleks Potansiyel Akışlar

Temel potansiyel akışlarının birleşimi pratikte karşılaşılan akış geometrilerine daha yakın bir problemin çözümüne katkıda bulunur. Akım fonksiyonları ve hız potansiyeli bilinen iki akışın birleşiminde temel prensip; bu fonksiyonların toplanması şeklindedir. Örneğin Şekil 6.10'da gösterilen, ideal akışkanın silindir etrafındaki akışı, üniform akış ile dipol akışının birleşiminden oluşmaktadır. Bu durumda,

İdeal akışkanın silindir etrafındaki akışı = üniform akış + dipol akış

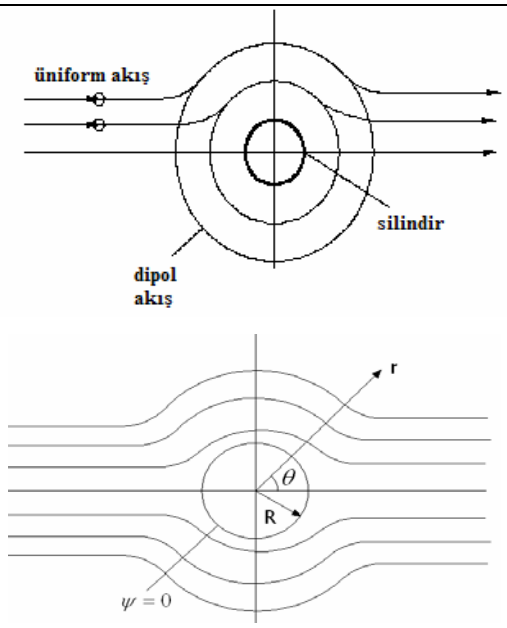
süperpozisyon (birleştirme) yaklaşımı kullanarak kompleks akışa ait fonksiyonlar,

$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$$

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$$

bağıntısı ile elde edilir. Temel akışların birleşimi sonucu akım çizgileri, yani akışın seyri belirlendikten sonra, basınç alanı Bernoulli denklemi ile bulunur.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.



Şekil 6.10. İdeal akışkanın silindir etrafında akışı için süperpozisyon prensibinin uygulanması ve koordinat tanımlaması

6.5.1. Dairesel Silindir Etrafındaki Akış:

Kompleks potansiyel fonksiyon için geçerli denklem,

$$\Phi(z) = \underbrace{u_\infty . z}_{\downarrow} \quad + \quad \underbrace{\frac{s}{z}}_{\downarrow}$$

şeklindedir. Denklemdeki parametreler için geçerli; $z = x + iy = r.e^{i\theta}$ ve $u_\infty = u$ bağıntıları kullanılarak,

$$\Phi(z) = ure^{i\theta} + \frac{s}{r}e^{-i\theta} = ur(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{s}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\Phi(z) = \underbrace{\left(ur + \frac{s}{r}\right)\cos\theta}_{\phi} + i\underbrace{\left(ur - \frac{s}{r}\right)\sin\theta}_{\psi}$$

akım çizgisi ve hız potansiyeli fonksiyonları elde edilir.

Hız bileşenleri;

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left[ur - \frac{s}{r}\right]\cos\theta = \left[u - \frac{s}{r^2}\right]\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\left[u + \frac{s}{r^2}\right]\sin\theta$$

denklemleriyle bulunur. Silindir yüzeyinde (r=R) radyal hız bileşeninin değeri sıfırdır, dolayısıyla,

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$V_r = 0 \Rightarrow u - \frac{s}{r^2} = 0$$

uygulanarak, silindir yarıçapını veren,

$$R = \sqrt{\frac{s}{u}}$$

bağıntısı elde edilir. Akış alanı içerisinde her iki hız bileşeninin de sıfıra eşit olduğu noktalar 'Durma noktaları' olarak adlandırılır. Silindir yüzeyindeki (r=R) durma noktaları için,

$$V_r = V_\theta = 0$$

$$V_\theta = -\left[u + \frac{s}{r^2}\right]\sin\theta = 0 \Rightarrow 2u\sin\theta = 0$$

bağıntıları yardımıyla;

$$\theta_1 = 0 \text{ ve } \theta_2 = \pi$$

elde edilir. Bu durumda, silindir yüzeyindeki akım fonksiyonunun değeri

$$\psi\big|_{r=R=\sqrt{s/u}} = \left[u\sqrt{s/u} - s\frac{1}{\sqrt{su}}\right]\sin\theta = \left[\sqrt{su} - \sqrt{su}\right]\sin\theta = 0$$

olacaktır. Silindir yüzeyindeki maksimum hız ise,

$$V = V_\theta = -2u\sin\theta$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} = -2u\cos\theta = 0$$

$$\theta_1 = \pi/2\,;\theta_2 = 3\pi/2$$

değeri kullanılarak,

$$(V_\theta)_{\max} = -2u$$

olacaktır. Silindir yüzeyinde boyutsuz basınç alanı için ise; $V = V_\theta$ kullanılarak, aşağıdaki bağıntı elde edilecektir:

$$P - P_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty{}^2 - \frac{1}{2}\rho\left[-2U_\infty\sin\theta\right]^2 = \frac{1}{2}\rho U_\infty{}^2\left[1 - 4\sin^2\theta\right]$$

$$cp = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty{}^2} = 1 - 4\sin^2\theta\,.$$

Silindir yüzeyine etkiyen kuvvetlerin bulunması için, Şekil 6.11'de gösterilen serbest cisim diyagramı göz önüne alınırsa; sürükleme ve kaldırma kuvvetlerini veren,

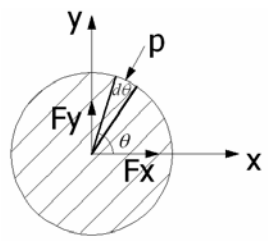
© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$F_x = -\int_0^{2\pi} P(Rd\theta)\cos\theta \text{ ve } F_Y = -\int_0^{2\pi} P(Rd\theta)\sin\theta$$

bağıntıları elde edilir. İntegral işlemi yapılırsa;

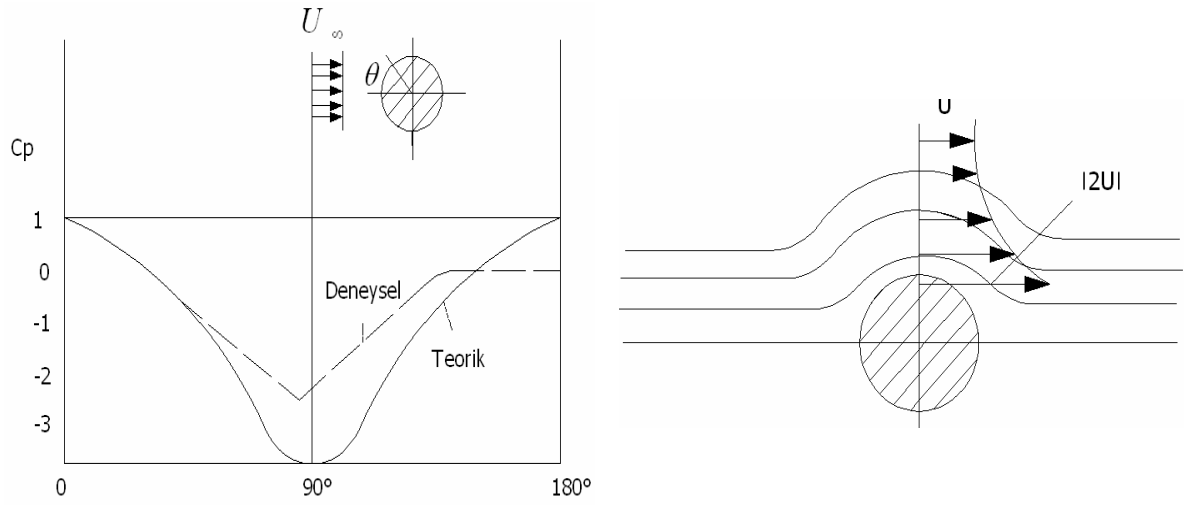
$$F_x = F_y = 0$$

sonucuna ulaşılır. Potansiyel akış teorisinde basınç alanının simetrik olmasından dolayı bu beklenen bir sonuçtur. Ancak gerçek şartlarda önemli seviyede sürüklenme kuvveti oluşur. Bu çelişkili durum, literatürde " d'Alembert paradoksu " olarak bilinir.



Şekil 6.11. Silindir yüzeyine etki eden kuvvetlerin gösterimş

Silindir etrafındaki potansiyel akış için geçerli basınç ve hız dağılımları, Şekil 6.12'de gösterilmiştir.

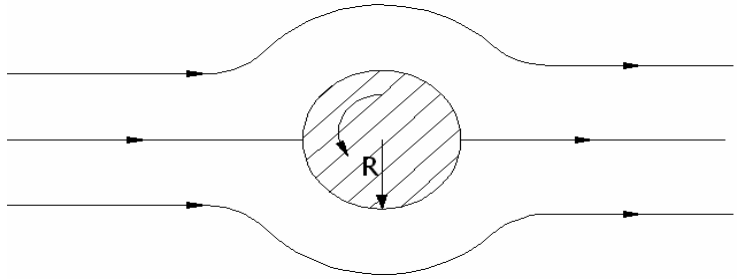


Şekil 6.12. Silindir etrafındaki akışa ait basınç ve hız dağılımı

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

6.5.2. Dönen dairesel silindir üzerinde akım

Şekil 6.13'de şematik olarak gösterilen, dönen silindir etrafındaki akım; üniform, dipol ve serbest girdap akışlarının birleşiminden oluşmuş kompleks bir akıştır. Akışa ait büyüklüklerin hesabında, bir önceki kısımda izlenen aşamalar aynen bu akışa da uygulanacaktır.



Şekil 6.13. Dönen dairesel silindir etrafındaki akım

$$\Phi(z) = \underbrace{uz}_{\text{Üniform akık}} + \underbrace{\frac{s}{z}}_{\text{Dipol}} - \underbrace{i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z}_{\text{Basit girdap}}$$

$$\Phi(z) = u.r.e^{i\theta} + \frac{se^{-i\theta}}{r} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(re^{i\theta}\right)$$

$$\Phi(z) = u.r.e^{i\theta} + \frac{se^{-i\theta}}{r} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(r + i\theta\right)$$

<u>Akım çizgisi ve hız potansiyel fonksiyonları</u>:

Silindir etrafındaki akım analizi sırasında elde edilen $s = R^2.u$ kullanılarak,

$$\phi(r,\theta) = ur\cos\theta + \frac{s\cos\theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = ur\cos\theta\left[1 + \frac{R^2}{r^2}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi(r,\theta) = ur\sin\theta - \frac{s\sin\theta}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = ur\sin\theta\left[1 - \frac{R^2}{r^2}\right] - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

<u>Hız Bileşenleri:</u>

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \left[u - \frac{s}{r^2}\right]\cos\theta$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\left[u + \frac{s}{r^2}\right]\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow$$

Radyal yönde elde edilen hız bileşeninin sabit silindir üzerindeki akım ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

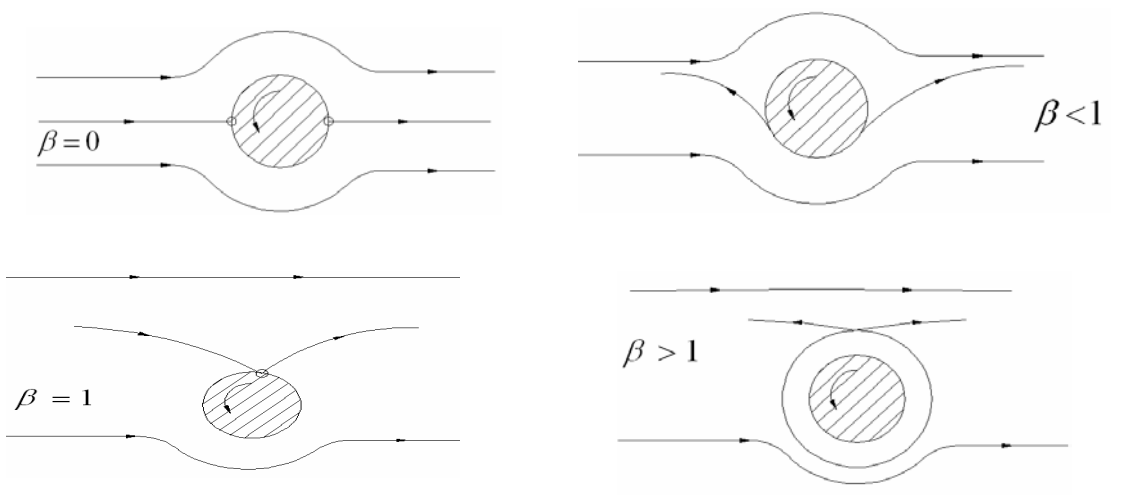
© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Durma Noktaları (r = R):

$$V_r = 0 \Rightarrow R = \sqrt{s/u}$$

$$V_\theta = 0 \Rightarrow -[u+u]\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{\frac{u}{s}} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi\sqrt{us}} = \beta$$

Durma noktalarının sayısı 'β' değeri ile ilişkili olup, mevcut alternatif durumlar Şekil 6.14'de özetlenmiştir.



Şekil 6.14. Dönen dairesel silindir etrafındaki akımda durma noktalarının 'β' ile değişimi

Silindir Yüzeyinde Basınç Dağılımı:

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho\left(-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2$$

$$P_s - P_\infty = \frac{1}{2}\rho U^2\left[1 - \left(-2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi RU}\right)^2\right]$$

Silindir Yüzeyine Etkiyen Kuvvetler:

Sürüklenme kuvveti;

$$F_x = -\int_0^{2\pi} P_s R\cos\theta d\theta = 0$$

Kaldırma kuvveti (u pozitif x yönünde ve Γ pozitif yönde olmak üzere);

$$F_y = -\int_0^{2\pi} P_s R\sin\theta d\theta = -\rho u\Gamma$$

Kaldırma kuvveti için elde edilen bu denklemden çıkarılacak önemli bir sonuç "üniform akım içinde, kendi ekseni etrafında dönen bir silindir üzerine, akışkanın uyguladığı taşıma kuvveti,

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

sadece akışkana ve silindir açısal hızına bağlıdır" şeklindedir. Denklemdeki net sirkülasyon için,

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_\theta R d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-2U \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) R d\theta$$

olduğu hatırlanmalıdır. Dönen silindir etrafındaki akış ile ilgili aşağıdaki iki olayın bilinmesinde fayda vardır:

<u>i) Magnus Etkisi:</u>

Dönen cisimler üzerinde etkili olan kaldırma kuvveti olarak adlandırılır. Bir beyzbol ya da golf topunun, hız doğrultusuna dik yönde bir eğri oluşturması bu etkiye bir örnektir.

<u>ii) Kutta – Jukowski Teoremi:</u>

Üniform akım içine, ekseni akıma dik olarak yerleştirilmiş silindirik bir cismin (dairesel kesitli olmasa da) yaratacağı taşıma kuvveti; cismin yarattığı net sirkülasyon "c" kapalı eğrisi üzerinde;

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V.ds$$

ifadesi ile hesaplanabilir olduğu sürece,

$$F_y = \rho_\infty U_\infty \Gamma$$

denklemi ile belirlenebilir.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER (6. BÖLÜM)

PROBLEM 1

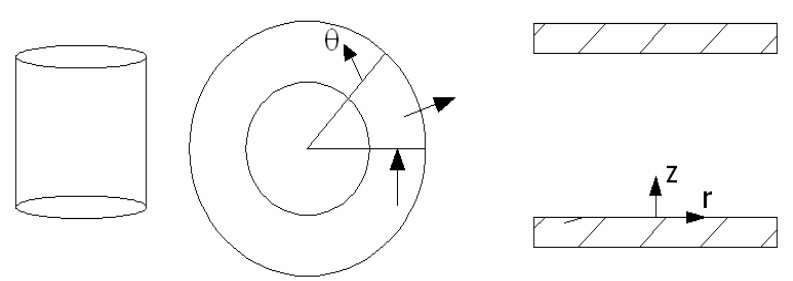
Şekilde gösterilen viskometrik akış için hız vektörü,

$$\tilde{V} = U\frac{y}{h}\tilde{\delta}_x$$

olarak veriliyor.

a) Akım fonksiyonunu bulunuz?

b) Akış miktarını eşit olarak bölen akım çizgisini belirleyiniz?



<u>ÇÖZÜM</u>

a)

$$u = U\frac{y}{h} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \psi(x,y) = U\frac{y}{h}dy + f(x)$$

$$\psi = U\frac{y^2}{2h} + f(x)$$

$$y = 0,\ \psi = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \psi = U\frac{y^2}{2h}$$

b)

Akım fonksiyonu y = h'ta maksimum olduğundan;

$$\psi_{\max} = U\frac{y^2}{2h} = U\frac{h}{2}$$

$$Q = \psi_{\max} - \psi_{\min} = U\frac{h}{2} - 0 = U\frac{h}{2}$$

$$\psi_{Q/2} = \frac{1}{2}\psi_{\max} = U\frac{h}{4} = U\frac{y^2}{2h} \Rightarrow y = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

PROBLEM 2

Silindirik koordinatlarda hız vektörü,

$$\widetilde{V} = \frac{A}{r}\widetilde{\delta}_r + \frac{A}{r}\widetilde{\delta}_\theta$$

olarak verilen sıkıştırılamaz akışa ait akım fonksiyonunu belirleyiniz?

ÇÖZÜM

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\psi(r,\theta) = \int rV_r d\theta + f(r) = r\theta\frac{A}{r} + f(r) = A\theta + f(r)$$

$$\psi(r,\theta) = -\int V_\theta dr + g(\theta) = -\int \frac{A}{r}dr + g(\theta) = -A\ln r + g(\theta)$$

$$A\theta + f(r) = -A\ln r + g(\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(r) = -A\ln r \\ g(\theta) = A\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \psi = A\theta - A\ln r$$

PROBLEM 3

Serbest vorteks için hız alanı,

$$\widetilde{V} = \frac{c}{r}\widetilde{\delta}_\theta \;\ldots\ldots c = 0.5\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

olarak veriliyor.

a) Akım fonksiyonunu bulunuz?

b) Hacimsel debiyi (birim derinlik için) $r_1 = 0.05m$ ve $r_2 = 0.7m$ arasında belirleyiniz?

ÇÖZÜM

a)

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\theta = -\frac{c}{r}$$

$$\psi(r,\theta) = -V_\theta dr + f(\theta) = -\frac{c}{r}dr + f(\theta) = c\ln r + f(\theta)$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = sabit = c_1$$

$$\psi = -c\ln r + c_1$$

b) Birim derinlik için hacimsel debi

$$\frac{Q}{b} = \psi(r_2) - \psi(r_1) = c\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

PROBLEM 4

Bir akış alanında akım çizgisi denklemi için,

$$\psi = x^2 - y^2$$

bağıntısı verilmektedir.

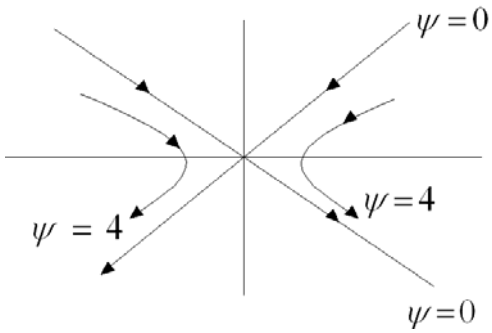
a) $\psi = 0$ ve $\psi = 4$ değerlerini kullanarak, akışa ait akım çizgisi eğrilerini çiziniz?

b) akışın irrotasyonel olduğunu gösteriniz?

<u>ÇÖZÜM</u>

a)

Akım çizgileri eğrileri farklı x ve y değerleri kullanılarak $\psi = 0$ ve $\psi = 4$ için aşağıdaki şekilde elde edilir:



b)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2y \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2x \end{aligned}\right\} \quad \widetilde{V} = -2y\widetilde{\delta}_x + (-2x)\widetilde{\delta}_y$$

$$\widetilde{\nabla} x \widetilde{V} = \begin{vmatrix} \widetilde{\delta}_x & \widetilde{\delta}_y & \widetilde{\delta}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \widetilde{\delta}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \widetilde{\delta}_z (-2+2) = 0$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

AKIŞKANLAR MEKANİĞİ II DERSİ II. ARA SINAVI ÇÖZÜMLERİ
Tarih: 21/12/2003 Süre: 90 dak.

SORU 1 (25p).
İki boyutlu sürtünmesiz bir akışa ait hız ve ağırlık (yerçekimi) kuvveti vektörleri:

$$\vec{V} = (Ax + By)\,\vec{i} - Ay\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{g} = g\,\vec{j} \quad ; \quad (A = 1\,s^{-1}, B = 2\,s^{-1}, g = 9.807\,ms^{-2})$$

olarak verilmektedir.denklemde pozisyon (x,y) ve hız sırasıyla 'm ve m/s' birimleriyle tanımlandığına göre Euler momentum denklemi yardımıyla (x,y)=(1,2) noktasına basınç değişim (gradyant) vektörü $(\vec{\nabla}P)$ için geçerli bağıntıyı türetiniz?

Çözüm 1

$$\vec{V} = (Ax + By)\,\vec{i} - Ay\,\vec{j} \qquad \vec{g} = g\,\vec{j} \qquad (x, y) = (1,2)$$

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} \Rightarrow -\vec{\nabla}P = \rho\left[\frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g}\right] \Rightarrow \vec{\nabla}P = \rho\left[\vec{g} - \frac{D\vec{V}}{Dt}\right]$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} = (Ax + By)(A\vec{i}) + (-Ay)(B\vec{i} - A\vec{j})$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}P = \rho\left[-\vec{i} + 7.80\vec{j}\right]$$

SORU 2 (50p). .....(a)10p, (b)10p, (c)5p, (d)15p, (e)5p.
İki boyutlu bir akış alanına ait akım çizgisi denklemi

$$\psi = a(x^2 - y^2), \qquad (a = 3\,s^{-1})$$

denklemi ile verilmektedir.

a) Akışın döngüsüz (irratosyonel) bir akış olduğunu gösteriniz?
b) Akış için hız potansiyelini (ϕ) veren denklemi türetiniz?
c) ψ ve ϕ denklemleri kullanılarak, bu iki parametrenin oluşturduğu eğrilerin akışın her noktasında birbirine dik olduğunu gösteriniz.
d) ψ : 0, 1, 2 ve 3 sabit değerlerinin her biri için x: 1, 2, 3, 4 ve 5 değerlerini kullanarak akım çizgisi eğrilerini oluşturunuz ve bu bölgedeki akışın geometrisi ve akış yönü ile değerlendirme yapınız?
e) x=3 noktasını göz önüne alarak, hızın hangi akım çizgisi arasında en büyük değere sahip olacağını belirleyiniz?

Çözüm 2

$$\psi = a(x^2 - y^2)$$

a) $u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = -2ay, \quad v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -2ax$

$$\vec{\nabla}x\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2a + 2a = 0 \Rightarrow \text{irrotasyonel}$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

b)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = 2axy + c_1(y) \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \phi = 2axy + c_2(x) \end{aligned}\right\} c_1(y) = c_2(x) = 0 \Rightarrow \phi = 2axy$$

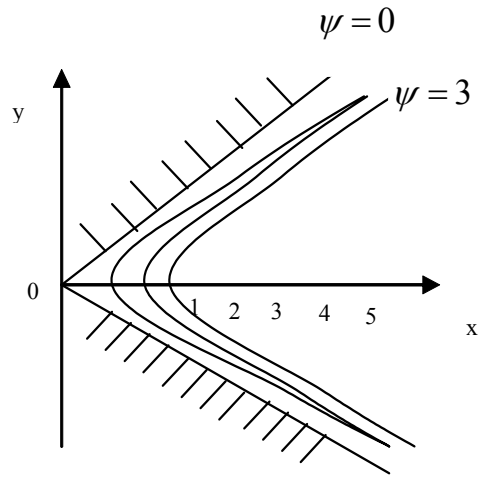
c)

$$\left.\begin{aligned} d\phi = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \theta / \partial y} = -\frac{-2ay}{-2ax} = -\frac{y}{x} \\ d\psi = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = -\frac{-2ax}{-2ay} = -\frac{x}{y} \end{aligned}\right\} -\frac{y}{x}\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow \text{Dik}$$

d)

$$y^2 = x^2 - \frac{\psi}{a} = x^2 - \frac{1}{3}\psi$$

x	ψ=0	ψ=1	ψ=2	ψ=3
1	1	0.81	0.57	0
2	2	1.91	1.82	1.73
3	3	2.94	2.88	2.82
4	4	3.95	3.91	3.87
5	5	4.96	4.93	4.89



e)

$x = 3$ $\qquad \psi_1 - \psi_0 = \psi_2 - \psi_1 = \psi_3 - \psi_2 \Rightarrow$ olduğundan hızlar eşittir.

SORU 3 (50p). .....(a)10p, (b)10p, (c)5p.

Potansiyel akım alanı içerisinde hareket etmekte olan bir akışkan partikülüne ait hız vektörü,

$$\vec{V} = \frac{K}{2\pi r}\vec{i}_\theta$$

olarak verilmektedir. Bu akışı göz önüne alarak;

a) Akım çizgisi denklemini türetiniz?
b) Hız potansiyeli denklemini türetiniz?
c) ψ ve ϕ eğrilerini (hesaplama gerekmeksizin) yaklaşık ölçekte çiziniz?

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

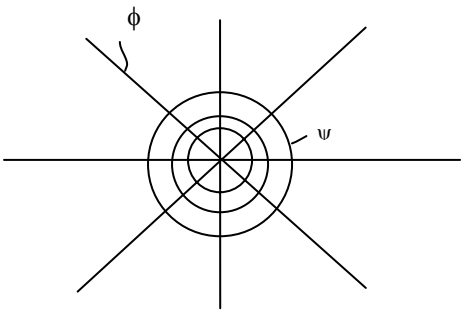
Çözüm 3

$$\vec{V} = \frac{K}{2\pi r}\vec{i}_\theta \Rightarrow v_r = 0, v_\theta = \frac{K}{2\pi r}$$

a) $v_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \Rightarrow \psi = -\dfrac{K}{2\pi}\ln r + c_1(\cancel{\theta})$

b) $v_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \Rightarrow \phi = -\dfrac{K}{2\pi}\theta + c_2(\cancel{r})$

c) $r = e^{\left(\psi + \frac{K}{2\pi}\right)} \Rightarrow x^2 + y^2 = c \Rightarrow$ çember denklemi



© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

AKIŞKANLAR MEKANİĞİ II DERSİ II. ARA SINAVI ÇÖZÜMLERİ
Tarih: 04/12/2004 Süre: 75 dak.

Soru 1.....(30p)

$$\rho \frac{D\widetilde{V}}{Dt} = \rho\widetilde{g} + \widetilde{\nabla} p + \mu \nabla^2 \widetilde{V} \quad \text{.....(1)}$$

Yukarıda verilen (1) nolu vektörel diferansiyel denklemi göz önüne alarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a) Denklem (1)'in literatürde bilinen ismini yazarak, fiziğin hangi temel prensibinden yola çıkılarak türetildiğini yazınız?
b) Denklem (1)'de bulunan her bir terimin fiziksel anlamını yazarak, türetimi sırasında kullanılan varsayımları yazınız?
c) Denklem (1)'in mevcut haliyle çözümü için kaç tane sınır şartı ve ilk zaman (başlangıç) şartı gereklidir?
d) Denklem (1)'i kullanarak, iki-boyutlu potansiyel akış için geçerli denklemi türetiniz ve bu denklemin kartezyen (x ve y) ve silindirik koordinatlar (r, θ) için açılımını yapınız?
e) Denklem (1)'i kullanarak, Bernouilli denkleminin nasıl türetileceğini gösteriniz/açıklayınız?

Çözüm 1

Çözüm ders notlarında mevcut (Bknz: Momentum denklemi türetimi).

Soru 2.....(20p)

Aşağıdaki kavramlar arasındaki temel farkı kısaca belirtiniz / şekil ya da denklem yardımıyla ifade ediniz?

momentum denklemi – Euler denklemi - Bernouilli denklemi- Nav. St. denklemi
sürtünmesiz akış – potansiyel akış
akım çizgisi – hız potansiyeli – kompleks potansiyel
kaynak akışı – kuyu akışı – dipol akış
serbest girdap (vorteks) – zorlanmış girdap (vorteks)

Çözüm 1

Çözüm ders notlarında mevcut (Bknz: Momentum denklemi türetimi ve potansiyel akışlar).

Soru 3.....(25p)

Potansiyel akım alanı içerisinde olan bir akış için kompleks potansiyel fonksiyon,

$$\Phi(z) = (z - \frac{a^2}{z})i \quad \text{.....} a\text{: sabit}$$

denklemi ile tanımlanmaktadır. Söz konusu akış için; akım çizgisi (ψ), hız potansiyeli (ϕ), hız bileşenleri (v_r, v_θ), boyutsuz basınç katsayısı (c_P) ve durma noktaları' na ait formülleri türetiniz?

Çözüm 3

$$\Phi(z) = \left(z - \frac{a^2}{z}\right)i = i(x + iy - \frac{a^2}{x+iy}) = i(x + iy - \frac{a^2(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$$

$$ix - y - \frac{ia^2x + a^2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \Phi(z) = \phi + i\psi = -y - \frac{a^2y}{x^2+y^2} i(x - \frac{a^2x}{x^2+y^2})$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Hız potansiyeli fonksiyonu,

$$\Rightarrow \phi = -y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} = -r\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \Rightarrow$$

akm çizgisi fonksiyonu,

$$\Rightarrow \psi = x - \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} = r\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

hız bileşenleri,

$$\Rightarrow V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \sin\theta\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\cos\theta\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)$$

Durma noktaları:

$V_r = V_\theta = 0$ olmalıdır. r=0 için $V_r = 0$'dır.

$V_\theta = -2\cos\theta \Rightarrow \theta_1 = \pi/2$ ve $\theta_2 = 3\pi/2$

Boyutsuz basınç katsayısı için, hız değerinin aşağıdaki denklemde yerine konuması gereklidir.

$$cp = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty} = \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty{}^2}\right)$$

Soru 4.....(25p)

İki-boyutlu potansiyel bir akış; fonksiyonel tanımlaması,

$\Phi_1(z) = K_1 z$ ve $\Phi_2(z) = K_2 \ln z$ ..... (K_1 ve K_2: sabit)

olarak verilen iki akışın birleşiminden oluşan bir akışla temsil edilebilmektedir. Söz konusu akış için <u>akım çizgisi</u> ve <u>hız potansiyeli</u> fonksiyonlarını belirleyerek,

a) sıkıştıramaz ve döngüsüz akış koşullarının sağlanıp sağlanamadığını test ediniz?
b) iki fonksiyona ait eğriler arasında diklik şartı geçerli olup olmadığını test ediniz?
c) akışa ait bir kaç akım çizgisini tahmin ederek, nasıl bir akış olduğunu yorumlayınız?

<u>Çözüm 3</u>

Çözüm aşamaları için ders notlarına bakınız.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

AKIŞKANLAR MEKANİĞİ II DERSİ II. ARA SINAVI ÇÖZÜMLERİ
Tarih: 22/12/2005 Süre: 75 dak.

SORU 1 (40p).

İki boyutlu kararlı bir akışa ait hız vektörü; $\vec{\mathbf{V}} = xy\,\vec{\mathbf{i}} - y^2/2\,\vec{\mathbf{j}}$ olarak verilmektedir:

a) potansiyel akış koşullarının geçerli olup, olmadığını belirleyiniz?
b) akım fonksiyonu ve hız potansiyel eğrilerine ait denklemleri türeterek, iki eğri arasındaki diklik koşulunun geçerli olup, olmadığını belirleyiniz?
c) x>0 ve y>0 bölgesinde Ψ=0, Ψ=20 ve Ψ=50 değerlerinin her biri için akım çizgilerini aynı grafik üzerinde gösteriniz (eğriler, x değişkeninin 1, 2 ve 3 değerleri için çizilebilir) ?
d) x=1 değerini referans alarak (d) şıkkında elde ettiğiniz grafik yardımıyla hangi iki akım çizgisi arasında akış hızının en yüksek değere ulaşacağını tespit ediniz?

ÇÖZÜM 1

a)

$\vec{\mathbf{V}} = xy\,\vec{\mathbf{i}} - y^2/2\,\vec{\mathbf{j}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2/2) = y - y = 0 \text{ .....sıkıştırılamaz}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-y^2/2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) = 0 - y = -y \text{ .....döngülü}$$

PA şartları sağlanmıyor.

b)

Diklik şartı

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \int xy.dy + c \Rightarrow \psi = \frac{xy^2}{2} + c$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \psi = \int \frac{y^2}{2}.dx + c \Rightarrow \psi = \frac{xy^2}{2} + c$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = \int xy.dx + c \Rightarrow \psi = \frac{x^2 y}{2} + f(y)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + \frac{f(y)}{dy} = -\frac{y^2}{2} \Rightarrow f(y) = -\frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + c \Rightarrow \phi = \frac{y^3}{6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = -\frac{(-v)}{u} = \frac{v}{u} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{v}{u} = \frac{-y^2/2}{xy} = -\frac{-y}{2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = -\frac{(u)}{v} = -\frac{u}{v} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{u}{v} = \frac{2x}{y}$$

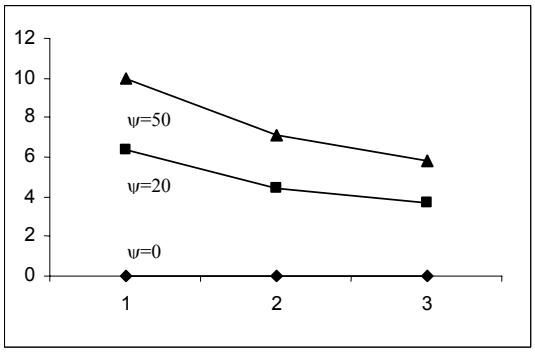
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} . \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -1 \text{ .....sağlanıyor}$$

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

c)

$$\psi = \frac{xy^2}{2}$$

	ψ=0	ψ=20	ψ=50
x=1	0	6.32	10
x=2	0	4.47	7.07
x=3	0	3.65	5.77



d)

$\psi_1 - \psi_0 = 6.32 > \psi_2 - \psi_1 = 3.68$

Soru 2.....(30p).

Potansiyel akım alanı içerisinde olan bir akış için kompleks potansiyel fonksiyon,

$$\Phi(z) = 2Uz^{1/2}$$

denklemi ile tanımlanmaktadır. Denklemlerde ***U*** serbest akış hızı olup, değeri sabittir. Söz konusu akış için aşağıdaki büyüklüklere ait formülleri türetiniz?

a) hız bileşenleri (v_x, v_y)

b) boyutsuz basınç katsayısı (c_P)

c) durma noktaları.

<u>ÇÖZÜM 2</u>

a)

$\Phi(z) = 2Uz^{1/2}$

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = Uz^{-1/2} = ur^{-1/2}e^{-i\theta/2} = \frac{U}{\sqrt{r}}(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2})$$

$$v_x = \frac{U}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots v_y = \frac{U}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \theta/2 = (1/2)\tan^{-1}(y/x)$

b)

$$c_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty{}^2} = 1 - \frac{(v_x^2 + v_y^2)}{U^2}$$

c)

$v_x = v_y = 0$ şartı uygulanarak bulunur.

© Tüm yayın hakları Doç. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

SORU 3 (30p).
Potansiyel akım alanı içerisinde dönen-dairesel bir silindir etrafında hareket etmekte olan bir akışkan partikülüne ait hız vektörünün bileşenleri aşağıdaki denklemle verilmektedir:

$$V_r = \left[U - S/r^2\right]\cos\theta \;\; ; \;\; V_\theta = -\left[U + S/r^2\right]\sin\theta + \omega$$

Denklemlerde ***U*** serbest akış hızı, ***S*** dipol şiddeti ve ***ω*** açısal hız olup sabit değerlerdir. Söz konusu akış için; aşağıda verilen büyüklüklere ait denklemleri türetiniz?
a) akım çizgisi (ψ),
b) hız potansiyeli (ϕ),
c) kompleks potansiyel fonksiyon ($\Phi(z)$)

<u>ÇÖZÜM 3</u>

a)

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Rightarrow \psi = \sin\theta(ur - \frac{s}{r}) + f(r)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} = \sin\theta(u + \frac{s}{r^2}) + \frac{f(r)}{dr} = \sin\theta(u + \frac{s}{r^2}) + w \Rightarrow f(r) = wr \Rightarrow \psi = \sin\theta(ur - \frac{s}{r}) + wr$$

b)

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \Rightarrow \phi = \cos\theta(ur + \frac{s}{r}) + f(\theta)$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \sin\theta(ur + \frac{s}{r}) + \frac{f(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta(ur + \frac{s}{r}) + w \Rightarrow f(\theta) = w\theta \Rightarrow \phi = \cos\theta(ur + \frac{s}{r}) + w\theta$$

c)

$$\Phi = \phi + i\psi$$