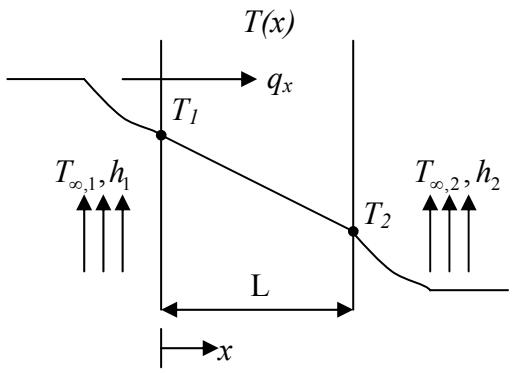
© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

3. ISI İLETİMİ ANALİZİ

3.1 Bir boyutlu ve kararlı ısı iletimine giriş

3.1.1 Düzlem Duvar



Şekil 3.1. Düzlem duvar

Varsayımlar:

i) Malzeme homojen ve izotropik ($k_x = k_y = k_z = k$ = sabit)

ii) Malzeme içinde ısı iletimi yok (q_v =0)

iii) Sürekli rejim mevcut ($\partial / \partial t = 0$)

iv) Sadece bir boyutta (x) ısı akışı mevcut ($\partial / \partial y = \partial / \partial z = 0$)

Isı iletimi genel denkleminden;

$$\frac{d}{dx}\left(-k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(q_x) = \Rightarrow q_x = sbt$$

$$\frac{dT}{dx} = c_1$$

$$T(x) = c_1 x + c_2$$

<u>Sınır Şartları (Şekil 3.1):</u>

$$T(x=0) = T_1$$

$$T(x=L) = T_2$$

$$x = 0 \Rightarrow T_1 = c_2$$

$$x = L \Rightarrow T_2 = c_1 L + c_2 = c_1 L + T_1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{L}$$

Bulunan c_1 değeri denkleme yerleştirildiğinde, sıcaklık dağılımı için

$$T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{L} x + T_1,$$

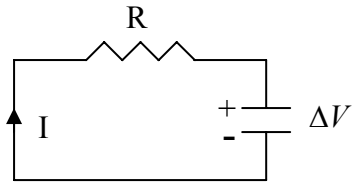
© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

ve ısı enerjisi için

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx} = kA\frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

denklemlerine ulaşılır.

Isıl Direnç:



$$I = \frac{\Delta V}{R} \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{R}$$

Şekil 3.2. Elektriksel-ısıl analoji

İletim ısıl direnci

$$q = kA\frac{\Delta T}{L} = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}} \Rightarrow R_i = \frac{L}{kA}$$

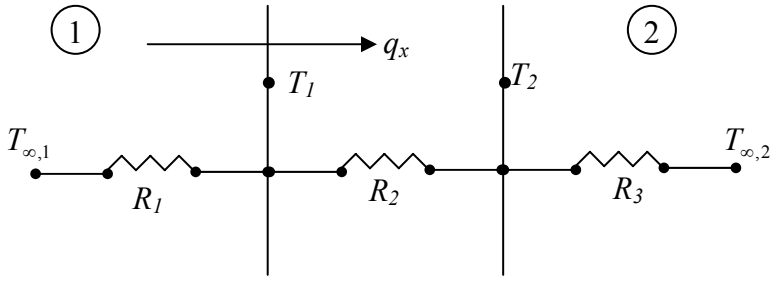
Taşınım ısıl direnci

$$q = hA\Delta T = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} \Rightarrow R_t = \frac{1}{hA}$$

Işınım ısıl direnci

$$q = h_r A\Delta T = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_r A}} \Rightarrow R_t = \frac{1}{h_r A}$$

Eşdeğer (toplam) Isıl Direnç:



Şekil 3.3 Çoklu ısıl direnç devresi

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Isı akısı 'x' ekseni boyunca sabit olup,

$$q_x = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{R_1} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_2} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{R_3}$$

$$q_x R_1 = T_{\infty 1} - T_1$$

$$q_x R_2 = T_1 - T_2$$

$$q_x R_3 = T_2 - T_{\infty 2}$$

denklemleri yazılabilir. Elde edilen denklemler taraf tarafa toplanınca;

$$q_x (R_1 + R_2 + R_3) = T_{\infty 1} - T_{\infty 2}$$

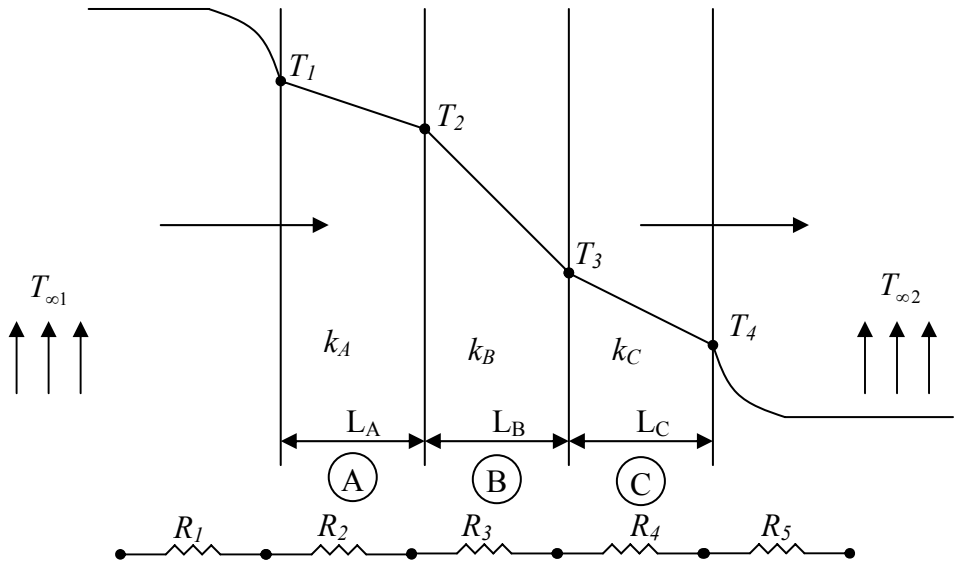
elde edilir. Buradan;

$$q_x = \frac{\Delta T}{\sum R_t}$$

sonucuna ulaşılabilir.

3.1.2 Komplex Düzlem Duvar ve Toplam Isı Transfer Katsayısı

<u>Seri bağlı katmanlar</u>



$$R_{eş} = \sum R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

Şekil 3.4. Seri-bağlı dirençlerden oluşmuş kompleks düzlem duvar

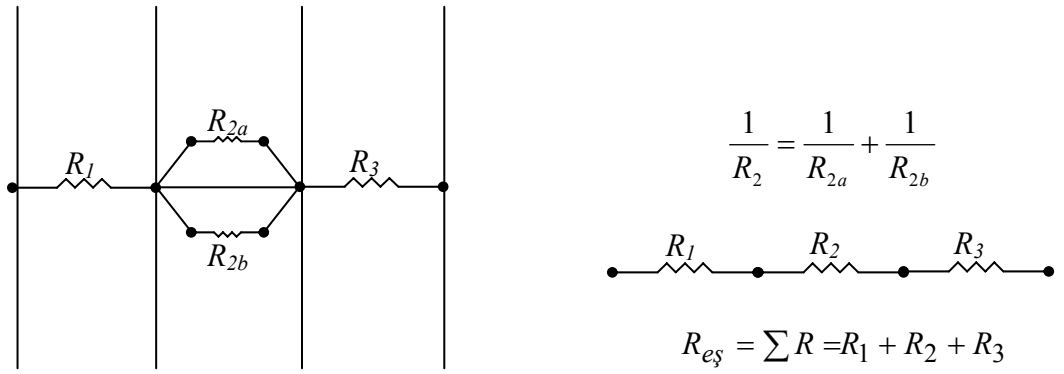
$$q_x = \frac{\Delta T}{\sum R} = UA\Delta T \Rightarrow UA = \frac{1}{\sum R} = \frac{1}{R_{Top}}$$

U : Toplam ısı transfer katsayısı (W/m^{2}K)

$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)} = UA(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Seri-paralel bağlı katmanlar



$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{2a}} + \frac{1}{R_{2b}}$$

$$R_{eş} = \sum R = R_1 + R_2 + R_3$$

Şekil 3.5. Seri-paralel bağlı dirençlerden oluşmuş kompleks düzlem duvar

3.2 Bir boyutlu, kararlı ve ısı üretimi olmayan sistemlerde ısı iletimi

3.2.1 Isı iletimi denklemi genel formu

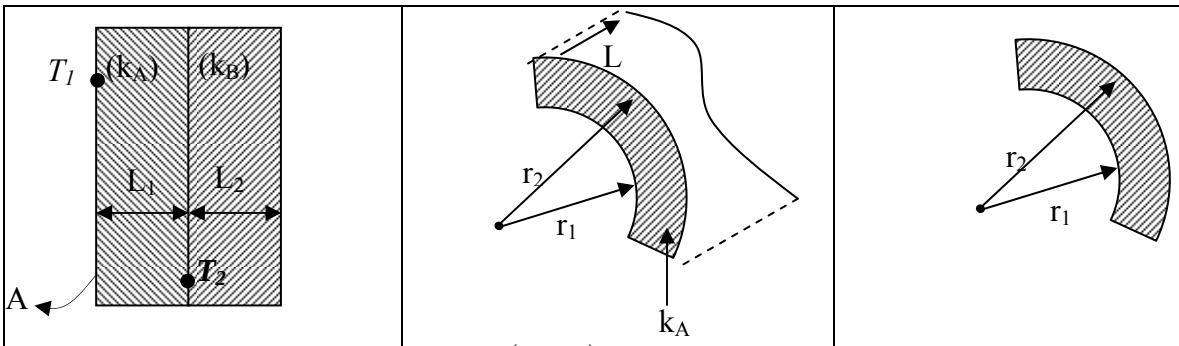
$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\left(kr^n\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$\left.\begin{matrix} n=0 \\ r=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Kartezyen koordinat

$\left.\begin{matrix} n=1 \\ r=r \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Silindirik koordinat.

$\left.\begin{matrix} n=2 \\ r=r \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Küresel koordinat.

3.2.2 Farklı koordinatlarda ısıl direnç



$$R = \frac{L_1}{k_A A}$$

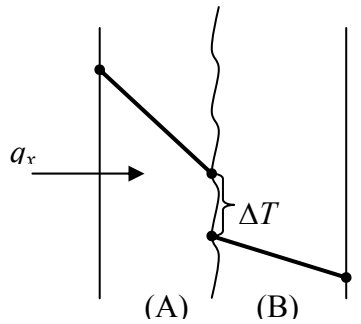
$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi . k_A AL}$$

$$R = \frac{(1/r_1 - 1/r_2)}{4\pi . k}$$

Şekil 3.6. Farklı koordinatlar için iletim ısıl direnci

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

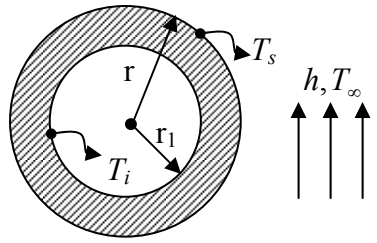
3.2.3 Temas direnci veya birikinti direnci

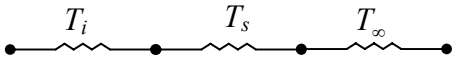


$$R_c = \frac{\Delta T}{q_x}$$

Şekil 3.7. Temas direnci dolayısıyla arayüzeyde sıcaklık düşüşü

3.2.4. Radyal Sistemlerde Kritik Yarıçap:





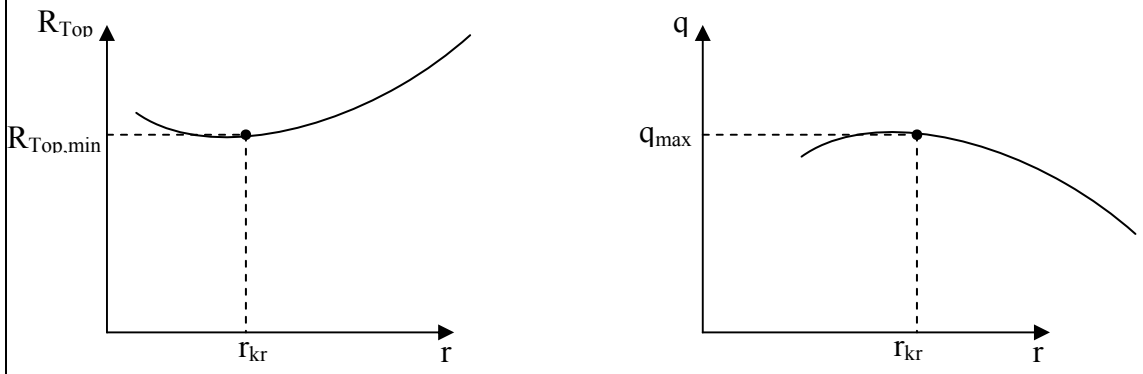
$$R_{Top} = \underbrace{\frac{\ln(r/r_1)}{2\pi.kL}}_{R_{il}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi.rhL}}_{R_{taş}}$$

Şekil 3.8. Radyal sistemlerde kritik yarıçap hesabı

Toplam direncin 'r' değerine göre türevi '0' değerine eşitlendiğinde

$$\frac{dR_{Top}}{dr} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{kr} = \dfrac{k}{h} \Rightarrow \text{ silindirik eleman} \\ r_{kr} = \dfrac{2k}{h} \Rightarrow \text{küresel eleman} \end{cases}$$

bağıntıları elde edilir.

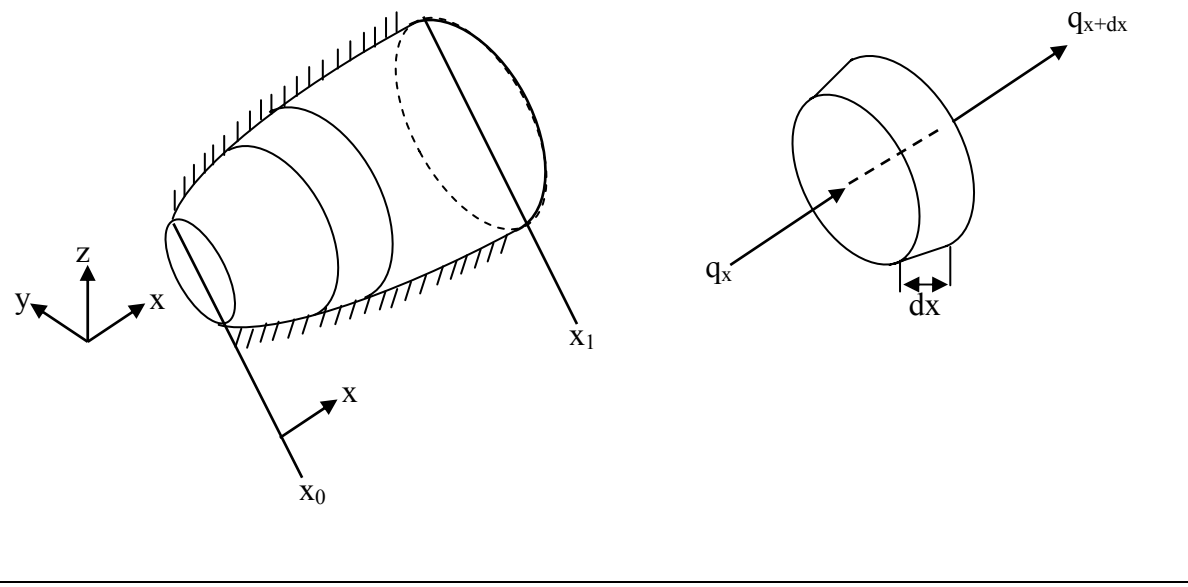


Şekil 3.8. Kritik yarıçap değerinde toplam ısıl direnç ve ısı enerjisi değerleri

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Kritik yarıçap değeri ikinci türevde yerine konulduğunda '0' dan büyük değere ulaşıldığından bu noktada direnç minimum (dolayısıyla ısı transferi maksimum) değere ulaşır.

3.2.5. Değişken Kesitli Geometrilerde Isı İletimi Analizi



Şekil 3.9. Yanal yüzeyleri yalıtılmış değişken kesitli geometri için diferansiyel analiz prensibi

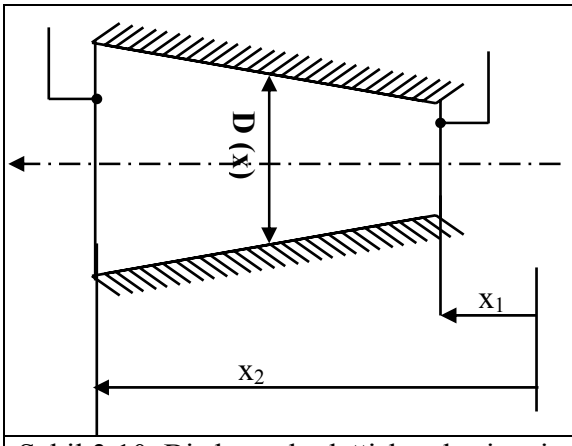
Diferansiyel hacme giren-çıkan ısı enerjilerinin eşitliğinden hareketle,

$$q_x = q_{x+dx}$$

$$q_x = -k(T)A_x \frac{dT}{dx}$$

$$q_x \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{A(x)} = -\int_{T_0}^{T} k(T)dT$$

denklemi elde edilir.



$$A_x = \pi \frac{D^2}{4} = \frac{\pi}{4} a^2 x^2, k(T) = cT^2$$

$$q_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{4}\right) a^2 x^2} = -\int_{T_1}^{T_2} \left(cT^2\right) dT$$

Şekil 3.10. Bir-boyutlu değişken kesite ait örnek

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

3.3 Bir boyutlu, kararlı ve ısı üretimi içeren sistemlerin analizi

$q_V \neq 0$ olma durumudur. Bu durumda ısı iletimi denklemi aşağıdaki gibi olur.

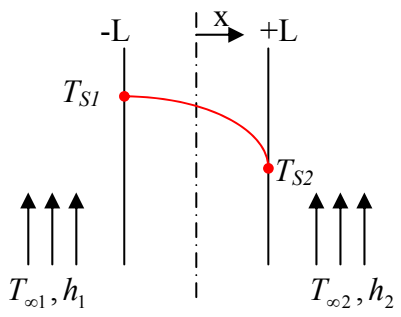
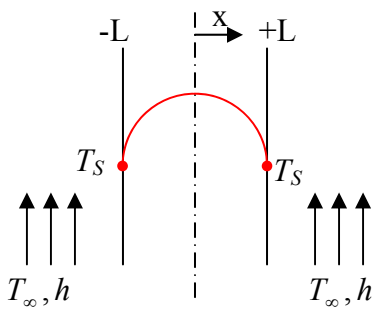
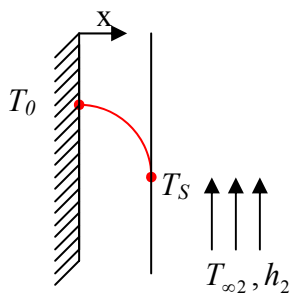
$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\left(kr^n\frac{dT}{dr}\right)+q_V=0$$

Düzlem Duvar

Aşağıda (Şekil 3.11) belirtilen üç farklı yüzey ısıl şartı söz konusudur. Silindirik ve küresel yüzeylerde aynı durum söz konusu olup, sadece radyal ısı iletim denklemi kullanılmalıdır. Yüzeydeki T_s sıcaklığının bulunması için,

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=h\left(T_S-T_\infty\right)$$

sınır koşulu uygulanmalıdır.

		
farklı yüzey sıcaklıkları	eşit yüzey sıcaklıkları	bir yüzeyi yalıtımlı
$T(-L)=T_{S1}$ $T(+L)=T_{S2}$	$T(+L)=T_S$ $\left.\frac{dT}{dx}\right\|_{x=0}=0$	$T(+L)=T_S$ $\left.\frac{dT}{dx}\right\|_{x=0}=0$

Şekil 3.11. İçerisinde ısı üretimi bulunan düzlem duvara ait ısıl koşullar

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

3.4 Kanatçıklı yüzeyler

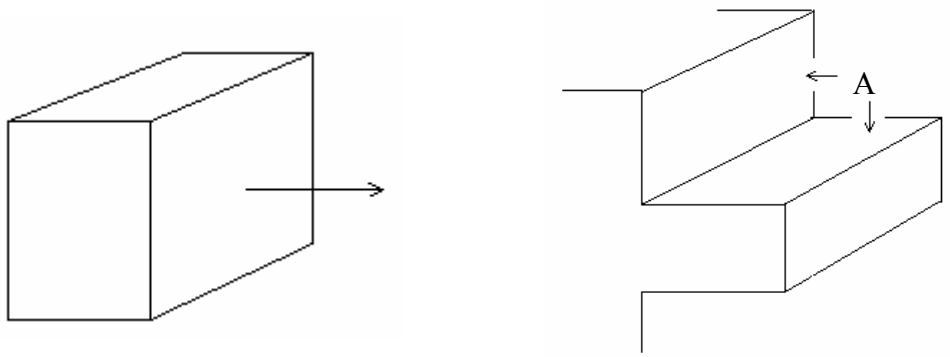
Genişletilmiş (kanatçıklı) yüzeyler tanımı; genellikle sınırları içinde iletimle, sınırları ile çevresi arasında ise taşınımla ve/veya ışınımla ısı geçişi olan bir katı için kullanılır. Taşınım ve iletimin birlikte gerçekleştiği birçok farklı durum olmakla birlikte en çok karşılaşılan uygulamalardan biri katı ve çevresindeki akışkan arasında ısı geçişini artırmak için kullanılan genişletilmiş yüzeylerdir. Bu tür yüzeylere kanat denir.

Sıcak bir akışkandan soğuk bir akışkana ısı geçişi en basit olarak metal bir duvar vasıtasıyla gerçekleşir. Birim zamanda transfer edilen ısı miktarı aşağıdaki denklemle ifade edilir.

$$Q = hA(T_s - T_\infty)$$

Denklemde görüldüğü gibi birim zamanda transfer edilen ısı miktarını artırmak için ; ısı transfer yüzeyini, sıcaklık farkını veya ısı taşınım katsayısını artırmak gereklidir. Eğer yüzey sıcaklığı T_s sabitse ısı geçişini artırmanın iki yolu vardır. Akışkan hızı yükseltilerek ısı taşınım katsayısı artırılabilir veya akışkan sıcaklığı T_∞ azaltılabilir. Isı taşınım katsayısının en yüksek değere artırılması bile, istenen ısı geçişini elde etmeye yeterli olmayabilir ve yüksek maliyetlerle karşılaşılabilir. Bu maliyetler akışkan hareketinin artırılması için gerek duyulan fan veya pompa gücü ile ilgilidir. Ayrıca T_∞ sıcaklığının azaltılması da pek mümkün değildir. Genellikle sıcaklık farkı sınırlıdır, pratikte verilmiş belirli sıcaklıklarda çalışılır.

Diğer bir seçenek ise transfer yüzey alanının artırılmasıdır. Şekil 3.12'de görüldüğü gibi ısı geçişi, taşınımın gerçekleştiği yüzeylerin artırılması ile artırılabilir.

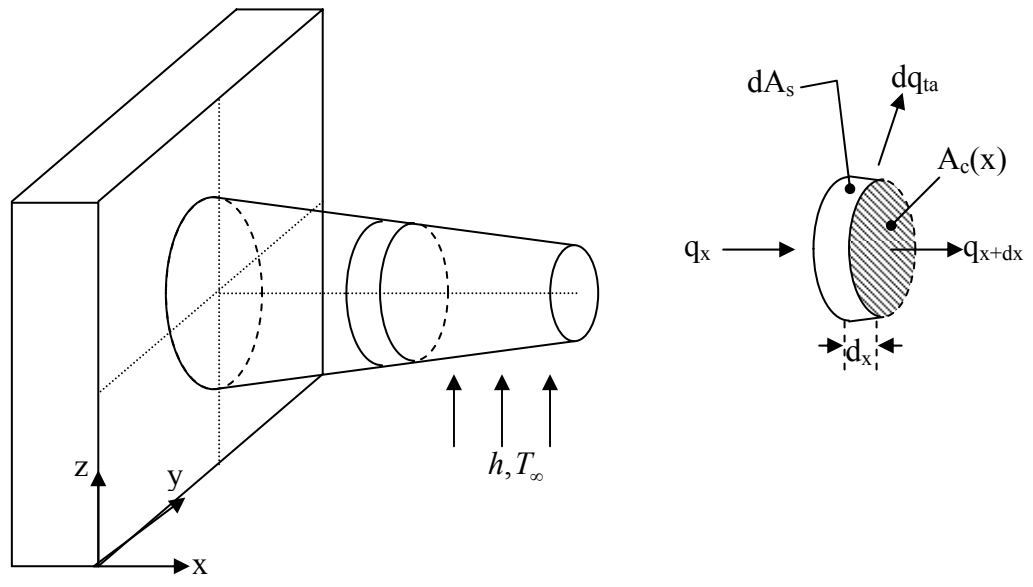


Şekil 3.12 Isı geçiş yüzeyinin kanatçık kullanımıyla arttırılması

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

3.5 Kanatçıklı yüzeylerde genel ısı iletimi analizi

Şekil 3.13' de görülen değişken kesitli kanatçık sisteminde bazı varsayımlar yapılarak kanatçıklar için genel ısı iletim denklemi türetilebilir. Bu varsayımlar; sistemin sürekli rejimde olması, bir boyutlu ısı iletiminin geçerli olması ve ısı üretiminin olmaması şeklindedir.



Şekil 3.13 Değişken kesitli kanatçık için ısı iletimi analizi

Sistemin enerji denklemi yazılırsa;

$$\dot{E}_g - \dot{E}_ç = 0$$

$$q_x - (q_{x+dx} + dq_t) = 0$$

$$q_X = -kA_i \frac{dT}{dx}$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx$$

$$dq_t = hdA_t (T - T_\infty)$$

$$(q_x - q_{x+dx}) - dq_t = 0 \quad , \quad q_x - q_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$\frac{d}{dx}(-k\frac{dT}{dx} A_i(x))\, dx - hdA_t (T(x) - T_\infty) = 0$$

k=sbt şartı uygulandığında,

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

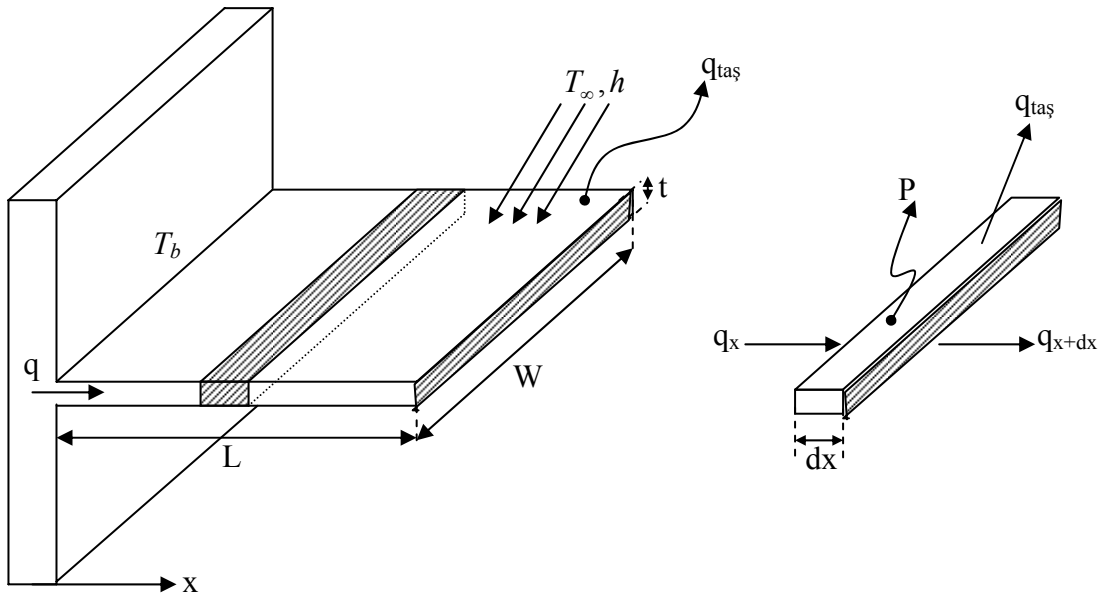
$$\frac{d}{dx}\left(A_i(x)\frac{dT}{dx}\right) - \frac{h}{k}\frac{dA_t}{dx}(T(x)-T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_i}\frac{dA_i}{dx}\right)\frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{h}{k}\frac{dA_t}{dx}\right)(T-T_\infty) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç, genişletilmiş bir yüzeyde, bir boyutlu enerji denkleminin genel gösterimidir.

3.6 Sabit kesitli kanatçıklar için sıcaklık dağılım denklemi

Sabit kesit alanlı kanatçıklarda, Şekil 3.14'de görüldüğü üzere, dA_i/dx sıfırdır. Buna göre genel enerji denkleminin ikinci terimi sıfır olur.



Şekil 3.14 Sabit kesitli kanatçık için ısı iletimi analizi

$$q_x - q_{x+dx} - q_{taş} = 0$$

$$-\frac{dq_x}{dx} - hA_t(T-T_\infty) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(kA_i\frac{dT}{dx}\right)dx - hPdx(T-T_\infty) = 0$$

Sabit 'k' ve A şartları uygulandığında;

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_i}(T-T_\infty) = 0$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin daha basit bir formuna ulaşabilmek için;

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$\theta = T(x) - T_\infty \text{ ve } m = \sqrt{\frac{hp}{kA_i}}$$

tanımlamaları uygulanırsa,

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

veya

$$\theta^{u} - m^2\theta = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, 2. dereceden lineer ve homojen bir diferansiyel denklem olup, genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

Bu denklemdeki sabitlerin özelleştirilmesi için, kanatçık türüne göre farklı sınır şartlarının uygulanması gereklidir.

<u>Sınır Şarları</u>

I. Sınır Şartı (Tüm Kanatçık İçin Aynı):

$$x = 0 \Rightarrow T(x=0) = T_b \Rightarrow \theta = T_b - T_\infty = \theta_b$$

II. Sınır Şartı (Kanatçık Tipine Göre Değişir)

i) Sonsuz uzunluktaki (çok uzun) kanat

$$x = L \to \infty \Rightarrow T(x=L) = T_\infty \Rightarrow \theta(L) = T_\infty - T_\infty = 0$$

ii) Uç kısmı yalıtılmış (adyabatik) kanat

$$x = L \Rightarrow q_x = 0 \Rightarrow \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_L = \left.\frac{d\theta(x)}{dx}\right|_L = 0$$

iii) Uç kısmında taşınım ile ısı transferi olan (gerçek) kanat

$$x = L \Rightarrow q_{il}\big|_L = q_{tas}\big|_L \Rightarrow -k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_L = h\theta(L)$$

<u>Örnek:</u> Sonsuz uzunluktaki (çok uzun) kanat için sıcaklık dağılımı

Genel denklem:

$$\theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$$

Sınır şartları:

$$x = 0 \Rightarrow \theta(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} = \theta_b \Rightarrow c_1 + c_2 = \theta_b$$

$$x = L = \infty \Rightarrow \theta(\infty) = c_1 e^{m\infty} + c_2 e^{-m\infty}$$

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Katsayılara ait değerler (sınır şartlarına uygun olarak):

$c_1 = 0 \rightarrow c_2 = \theta_b$

Katsayılar denkleme yerleştirildiğinde, sıcaklık dağılım denkleminin özel formu olan

$$\theta(x) = \theta_b e^{-mx}$$

veya

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-\sqrt{\frac{Ph}{kA}} * x}$$

denklemi elde edilir.

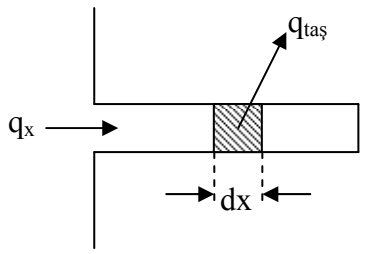
3.7 Kanatçıklara ait diğer parametrelerin hesabı

i) Kanatçıktan transfer edilen ısı enerjisi miktarı

Sabit kesitli kanatçık için Şekil 3.15'de gösterilen ısı dendesinden hareket edilirse, kanatçık tabanından iletim ile transfer edilen ısı enerjisi değeri ile kanatçıktan taşınım ile çevreye transfer edilen ısı enerjisine eşit olacaktır. Bu nedenle; kanatçıktan transfer edilen ısı enerjisi aşağıdaki denklemlerden herhangi biri kullanılarak bulunur:

$$q_{(x=0)} = -kA_i \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$q_{tas} = \int_0^L hPdx\theta(x)$$



Şekil 3.15 Sabit kesitli kanatçık için ısı dengesi

<u>Örnek:</u> Sonsuz uzunluktaki (çok uzun) kanattan transfer edilen ısı enerjisi

Fourier ısı iletimi kanunu kullanılarak;

$$q_x = kA_i \frac{d\theta}{dx}$$

$$q_x = \sqrt{PhkA_i}\,\theta_b \tanh(mL)$$

© **Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.**

ii) Kanatçık Etkenliği (tek kanatçık)

Kanat kullanımı bir yüzeyden ısı geçişini artırmak için etkin yüzey alanını artırmayı amaçlar. Bununla birlikte, kanatın kendisi orjinal yüzeyden ısı geçişine bir iletim direnci gösterir. Bu nedenle kanat kullanımının ısı geçişini mutlaka artıracağı önceden söylenemez. Bu husus kanat etkenliği tanımlanarak değerlendirilebilir. Kanat etkenliği (ε_k); kanatlı halde geçen ısının, kanatsız halde geçebilecek ısıya oranı olarak tanımlanır,

$$\varepsilon_k = \frac{q_x \big| kanatcikli}{hA_i \theta_b}$$

ve denklemi ile ifade edilir.

Örnek: Çok uzun kanatçık için kanat etkenliği

$$\varepsilon_k = \frac{\sqrt{kA_i Ph}\theta_b}{hA_t \theta_b} = \sqrt{\frac{kP}{hA_i}}$$

iii) Kanatçık verimi

Kanat ısıl performansının bir diğer ölçüsü kanat verimidir. Taşınım için en yüksek sıcaklık farkı taban ve akışkan arasındaki sıcaklık farkıdır.

$$\theta_b = T_b - T_\infty$$

Bu nedenle kanadın yayabileceği enerjinin en yüksek değeri bütün kanat yüzeyinin taban sıcaklığında olduğu zaman gerçekleşecektir. Ancak bu ideal bir durumdur ve kanat içinde sıcaklık değişimi mutlaka vardır. Bu düşünceden yola çıkılarak kanat verimi şu şekilde ifade edilir.

$$\eta_k = \frac{q_x \big| kanatcik}{q_{\max}} = \frac{q_x \big| kanatcik}{hA_k \theta_b}$$

Örnek: Çok uzun kanatçık için kanat verimi

$$\eta_k = \frac{\sqrt{kA_i Ph}\theta_b}{hPL\theta_b} = \sqrt{\frac{kA_i}{hPL}}$$

Kanatcıklı yüzeyin toplam verimi

$$\eta_0 = \frac{q_t}{q_{\max}} = \frac{q_t}{hA_t \theta_b} \qquad A_t = A_f + A_b$$

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$q_t = hA_b\theta_b + hA_f\theta_b.\eta \Rightarrow h(A_t - A_f)\theta_b + hA_f\theta_b.\eta$$

$$q_t = hA_t\theta_b\left[1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta)\right]$$

$$\eta_0 = 1 - \frac{A_f}{A_t}(1-\eta)$$

3.8. Farklı Kanatçıklar için yüzey sıcaklık dağılımı ve yüzeyden transfer edilen ısı miktarını veren eşitlikler

Yukarıda çok uzun kanatçık için türetilen denklemlerde izlenen yol diğer kanatçık tiplerine uygulanırsa, aşağıdaki tabloda özetlenen eşitlikler elde edilir:

Kanatçık Tipi	θ / θ_b **Sıcaklık Dağılımı**	q_f / q_k **Kanatçık Isı Transfer Miktarı**
sonsuz uzunluktaki kanatçık $\theta(L) = 0$	e^{-mx}	$M = \sqrt{hPkA_i}.\theta_b$
adyabatik uçlu kanatçık $\left.\frac{d\theta}{dx}\right\|_{X=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M.\tanh mL$
ucunda taşınım İle ısı transferi olan kanatçık	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$	$q_f = M\frac{\sinh mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$

$\theta = T - T_\infty$ $\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty$ $M = \sqrt{hPkA_i}.\theta_b$	$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ $\cosh(x \mp y) = \cosh x.\cosh y \mp \sinh x.\sinh y$ $\sinh(x \mp y) = \sinh x.\cosh y \mp \sinh y.\cosh x$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

3.9. Değişken kesitli kanatçık sistemleri

Kanatçık kesit alanını değiştirmek suretiyle malzemeden ve dolayısıyla ağırlıktan tasarruf sağlanabilir.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_i}\frac{dA_i}{dx}\right)\frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{h}{k}\frac{dA_t}{dx}\right)(T - T_\infty) = 0$$

Değişken kesitli kanatçık sisteminde genel enerji denkleminin ikinci terimi korunmak zorunda olup,

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{A_i}{A_i}\frac{d}{dx}\frac{dT}{dx} - \left(\frac{h}{kA_i}\frac{dA_t}{dx}\right)(T - T_\infty) = 0$$

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

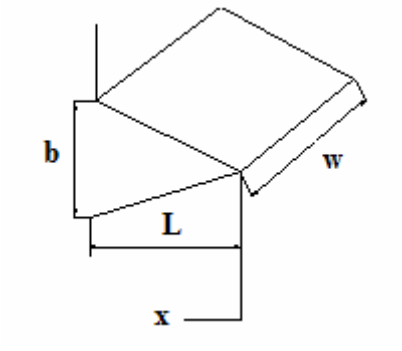
denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dT}{dx}-(\frac{h}{kA_i}\frac{dA_t}{dx})(T-T_\infty)=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx}-(\frac{h}{kA_i}\frac{dA_t}{dx})\theta=0$$

değişken kesitler için genel kanatçık denklemine ulaşılır.

3.10 Üçgen kanatçık sistemi için çözüm



Şekil 3.16 Üçgen kanatçık geometrisi

Eğer 'x' kanatçık ucundan tabanına doğru ölçülürse; iletim alanı 'x' e bağlı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$A_i(x)=\frac{b}{L}wx$$

Perimetrik çevre (P) hava ile temastaki yüzeylerin 'dx' diferensiyel elemanı için toplamı olup,

$$dA_t=Pdx$$

Kanatçığın kalınlığının, genişliğine oranının çok küçük olduğu varsayımıyla, $P=2w$ olur. Buna göre taşınım alanı;

$$dA_t=2wdx$$

şeklindedir. Bu değerleri genel enerji iletim denkleminde yerlerine koyarsak;

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx}-(\frac{h}{k\frac{b}{L}wx}\frac{2wdx}{dx})\theta=0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx}-(\frac{2hL}{kb})\theta=0$$

$\beta=\frac{2hL}{kb}$ olarak tanımlarsak ;

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx}-\frac{\beta}{x}\theta=0$$

denklemi elde edilir. Değişken kesitli denklemlerin çözümünde Bessel fonksiyonları kullanılır.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+m^2)y=0$$

Burada 'm' bir sabittir. Yukarıdaki denklem mertebesi m olan bir Bessel denklemidir. Bu denklemin genel çözümü şu şekildedir.

$$y(x)=C_1\mathrm{I}_m(x)+C_2K_m(x)$$

I_m = mertebesi m olan birinci çeşit Bessel fonksiyonu

K_m = mertebesi m olan ikinci çeşit Bessel fonksiyonu

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\theta}{dx}-\frac{\beta}{x}\theta=0$$

Bu denklem modifiye edilmiş Bessel denklemidir. Denklemi x^2 ile çarparsak;

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+x\frac{d\theta}{dx}-\beta x\theta=0$$

$\theta=y$ tanımlaması yaparak denklemleri karşılaştırırsak;

$$\beta\, x\theta=(x^2+m^2)\ y \quad\rightarrow\quad \beta\, x=(x^2+m^2)$$

$m=0$ alınırsa; $\beta\, x=x^2 \quad\rightarrow x=2\sqrt{\beta x}$ olur.

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+x\frac{d\theta}{dx}-\beta x\theta=0$$

<u>i) Sıcaklık dağılımı</u>

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda, denklemin genel çözümü şu şekilde olur.

$$\theta(x)=C_1\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta x})+C_2K_0(2\sqrt{\beta x})$$

Denklemde; C_1 ve C_2 sabitleri, I_0 mertebesi sıfır olan birinci çeşit Bessel fonksiyonunu ve K_0 mertebesi sıfır olan ikinci çeşit Bessel fonksiyonunu temsil etmektedir. Sınır şartlarını uygularsak;

$x=0$ da;

$$K_0(x)=\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{I}_{-x}(x)-\mathrm{I}_x(x)}{\sin(x\pi)}$$

değeri sonsuzdur. Fiziki olarak, sıcaklık bu noktada sonsuz olamayacağından C_2=0 olmalıdır. Bu durumda,

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$\theta(x) = C_1 \mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta x})$$

elde edilir. C_1 sabiti,

$$x = \mathrm{L} \text{ de; } \theta = \theta_b = T_b - T_\infty$$

şartı kullanılarak,

$$C_1 = \frac{\theta_b}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}$$

bulunur.Sıcaklık dağılım denkleminin çözümü ise

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta x})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}$$

şeklinde elde edilir.

<u>ii) Kanatçıktan transfer edilen ısı miktarı</u>

$$q_x = kA_i \frac{d\theta}{dx}$$

$$A_i = w\frac{b}{L}x$$

$$x = L \text{ de ;} \qquad A_i = w\frac{b}{L}L \quad \rightarrow \quad A_i = wb$$

$$q_x = kA_i \frac{d}{dx}\theta_b \frac{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta x})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}$$

$x = L$ de türev alınarak ve

$$\frac{d}{dx}\mathrm{I}_0(ax) = a\mathrm{I}_1(ax)$$

bağıntısı kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$q_x = \sqrt{2hkb}\ \theta_b \frac{\mathrm{I}_1(2\sqrt{\beta L})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}$$

<u>iii) Kanatçık verimi</u>

$$\eta_k = \frac{q_x}{hA_t\theta_b}$$

$$\eta_k = \frac{\sqrt{2hkb}w\theta_b \dfrac{\mathrm{I}_1(2\sqrt{\beta L})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}}{h2wL\theta_b}$$

Yukarıdaki denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

© Tüm yayın hakları Prof. Dr. Bülent Yeşilata'ya aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{\beta L}} \frac{\mathrm{I}_1(2\sqrt{\beta L})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}$$

denklemi elde edilir.

<u>iv) Kanatçık etkenliği</u>

$$\varepsilon_k = \frac{q_x}{hA_i\theta_b}$$

$$\varepsilon_k = \frac{\sqrt{2hkb}w\theta_b}{hwb\theta_b} \frac{\mathrm{I}_1(2\sqrt{\beta L})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L})}$$

Yukarıdaki denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\varepsilon_k = \frac{2L}{\sqrt{\beta L}} \frac{\mathrm{I}_1(2\sqrt{\beta L})}{\mathrm{I}_0(2\sqrt{\beta L}}$$

denklemi elde edilir.