Fifth Edition

CHAPTER

1

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

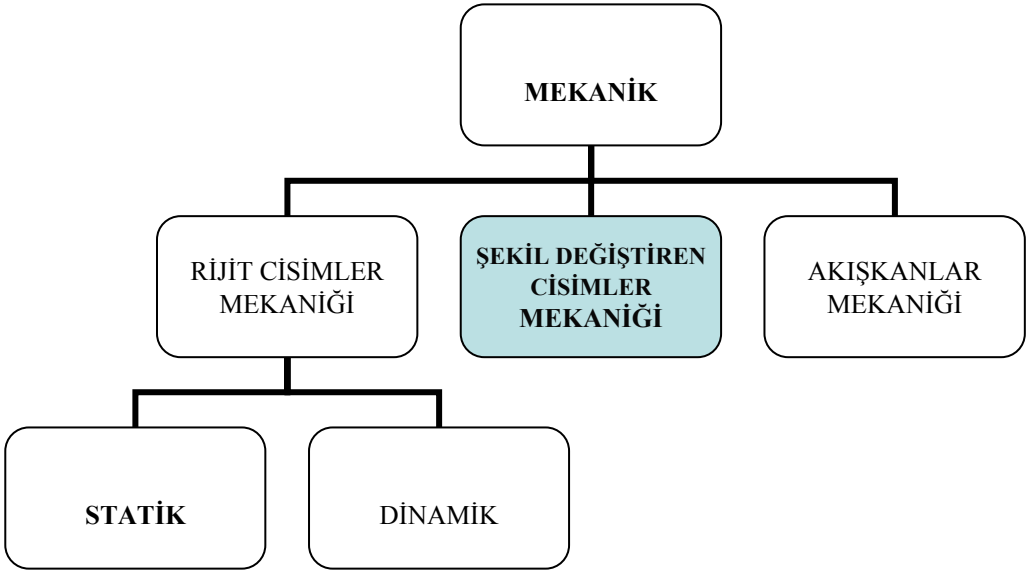
Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

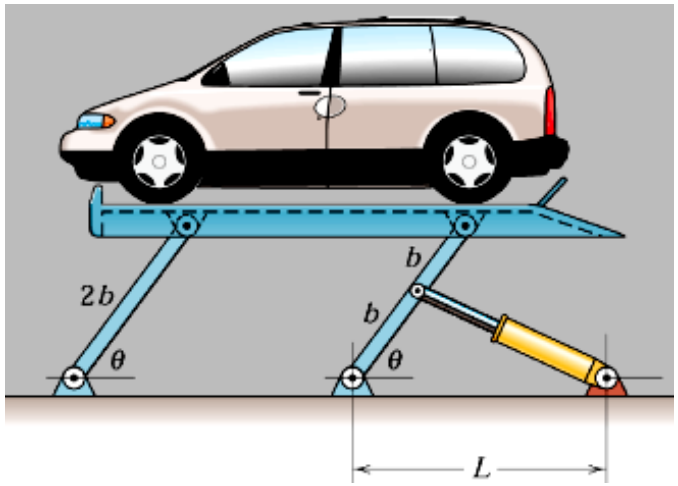
Hazırlayan:
Doç.Dr. Cesim ATAŞ

GİRİŞ –Gerilme Kavramı

Değerlendirme:	1. Ara Sınav	%12.5
	2. Ara Sınav	%12.5
	Quiz	%15
	Ödev+Lab.	%10
	Final	%50

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

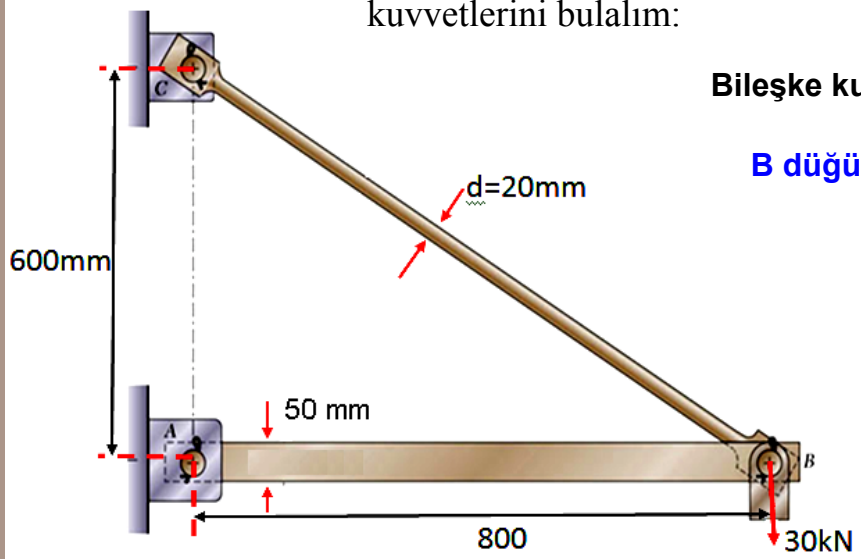




© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

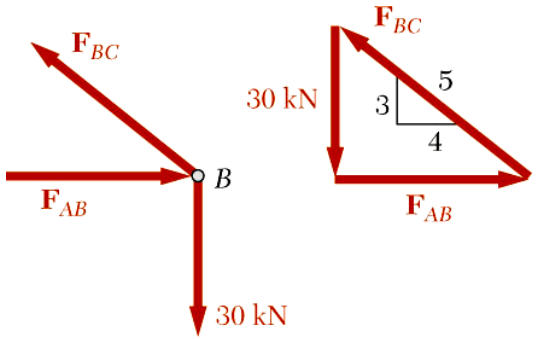
Statik-*hatırlatma*

Statik analiz ile her bir elemandaki iç kuvvetleri ve bağlantı noktalarındaki tepki kuvvetlerini bulalım:



Bileşke kuvvetler çubuk eksenleri doğrultusunda olacaktır:

B düğüm noktasının SCD'ından;



$$\sum \vec{F}_B = 0$$

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30\,\text{kN}}{3}$$

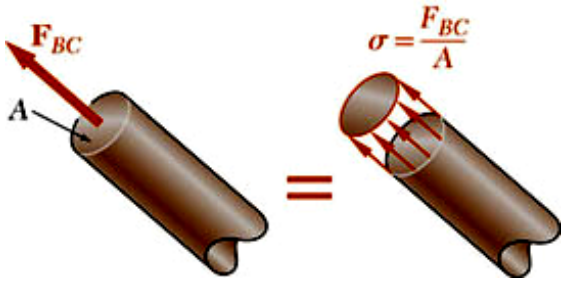
$$F_{AB} = 40\,\text{kN}$$

(bası-compression)

$$F_{BC} = 50\,\text{kN}$$

(çeki-tension)

Yapı güvenli bir şekilde 30 kN'luk yükü taşıyabilir mi?



$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3\ N}{314\ \ mm^2} = 159\ MPa$$

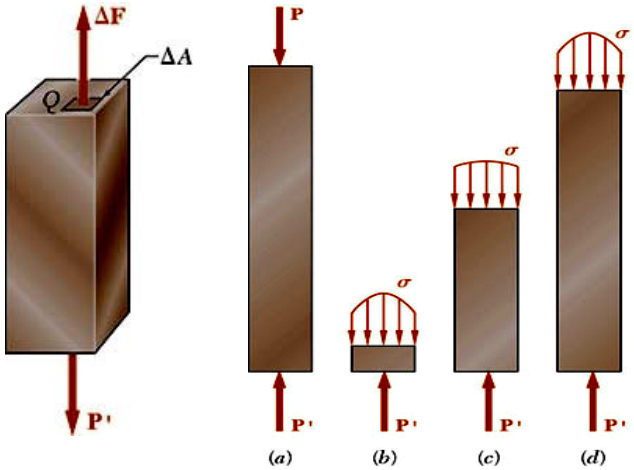
d_{BC} = 20 mm çapındaki BC elemanında birim alana gelen iç kuvvet (gerilme- stress)

Çelik için izin verilebilir gerilme (the allowable stress) : $\sigma_{\text{all}} = 165\ \text{MPa}$

ise *BC* elemanı emniyetle söz konusu yükü taşıyabilir.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Eksenel Yüklemede Normal Gerilme : (Axial Loading -Normal Stress)



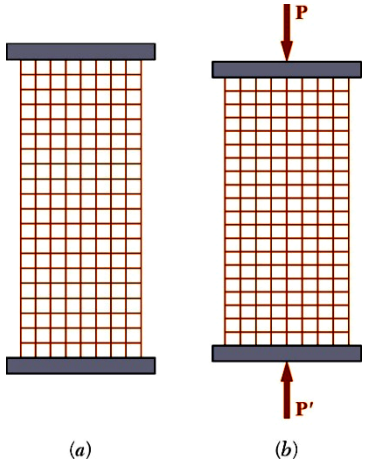
- Bir kesite etkiyen bileşke iç kuvvet yüzeye dik ise ortalama normal gerilme;

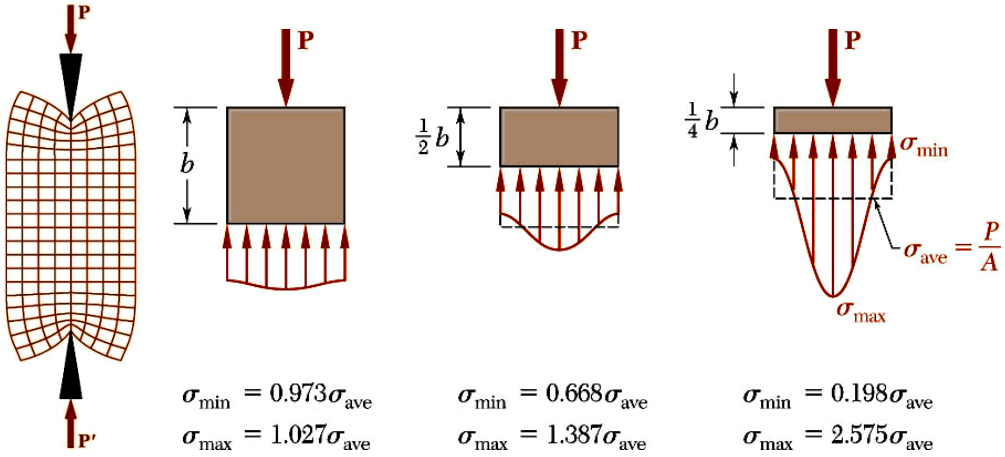
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad \sigma_{ort} = \frac{P}{A}$$ şeklinde ifade edilir.

- Ancak herhangi bir noktadaki gerilme ortalama gerilmeye eşit olmayabilir. Fakat gerilme dağılımı şu bağıntıyı sağlar:

$$P = \sigma_{ort} A = \int dF = \int_A \sigma \, dA$$

Saint-Venant Prensibi:

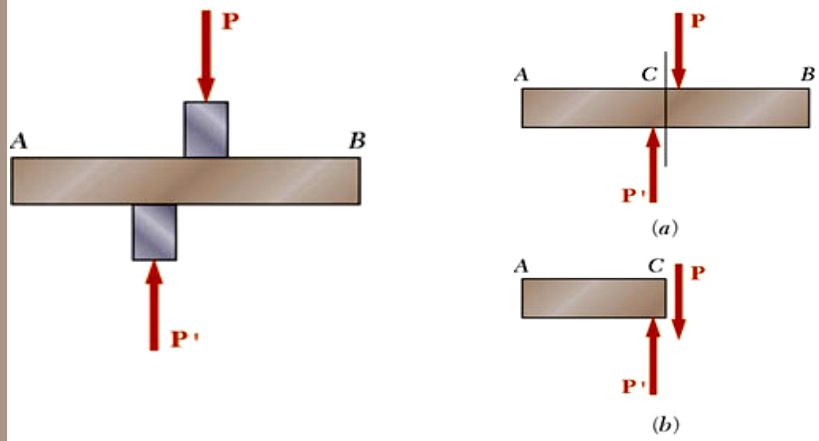




Konsantre tekil bir kuvvetten dolayı meydana gelen gerilmeler uygulama noktasından yeterince uzak kesitlerde uniform hale gelir.

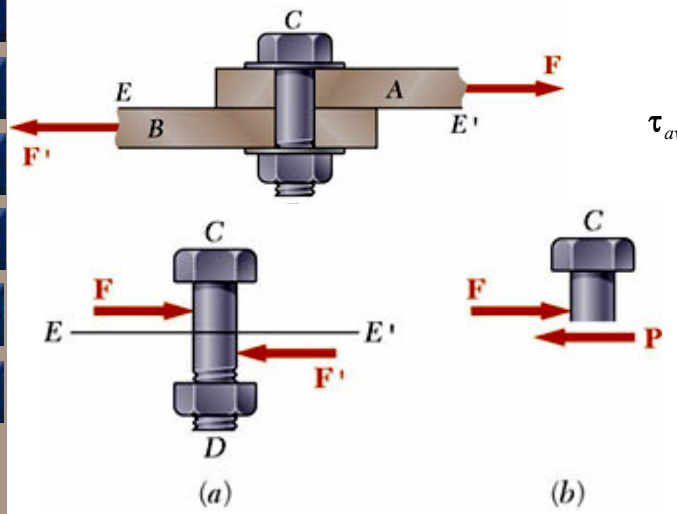
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Kayma Gerilmeleri (Shearing Stress)



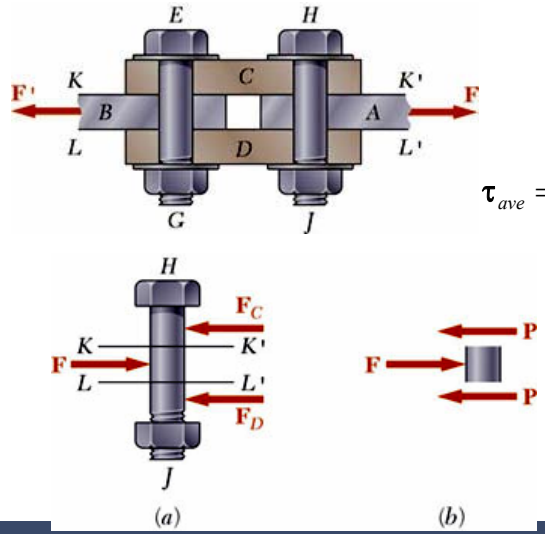
- *P* ve *P'* kuvvetleri *AB* elemanına düzey olarak etkimektedir.
- *C* kesitindeki iç kuvvetlere kesme kuvvetleri denir ve bu kuvvetlerin bileşkesi *P*'ye eşittir.
- Bu kesitteki ortalama kayma gerilmesi; $\tau_{ave} = \tau_{ort} = \dfrac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}}$
- Gerçekte kayma gerilmesi kesit boyunca uniform (düzgün) değildir.

Tekli Kesim/Kayma (Single Shear)



$$\tau_{ave} = \tau_{ort} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}}$$

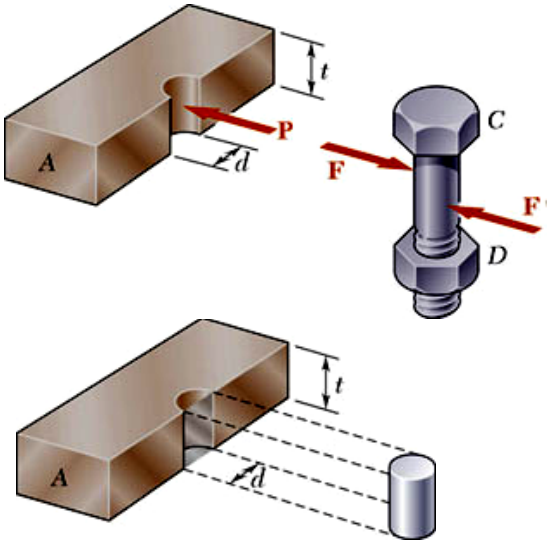
Çiftli Kesim/Kayma (Double Shear)



$$\tau_{ave} = \tau_{ort} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{2A}}$$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Bağlantılardaki Yatak Gerilmeleri (Bearing Stress in Connections)



- Civatalar, perçinler ve pimler bağlantı (temas) noktalarında veya yatak yüzeylerinde gerilmeler meydana getirirler.
- Yüzeye etki eden kuvvetlerin bileşkesi pime etki eden kuvvete eşit ve zıt yöndedir. Yüzeye etki eden ortalama kuvvetin şiddeti *yatak gerilmesi* olarak adlandırılır.

$$\sigma_{yatak} = \sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{t\,d}$$

Emniyet Faktörü/Katsayısı (Factor of Safety)

Yapısal elemanlar veya makine elemanları dizayn edilirken; çalışma şartlarındaki gerilmelerin, malzemenin taşıyabildiği gerilme (çekme mukavemeti- ultimate strength) değerinden daha düşük olmasına dikkat edilir.

Neden emniyet katsayısı kullanılmalıdır?

Malzeme özelliklerindeki belirsizlikler ve değişkenlikler

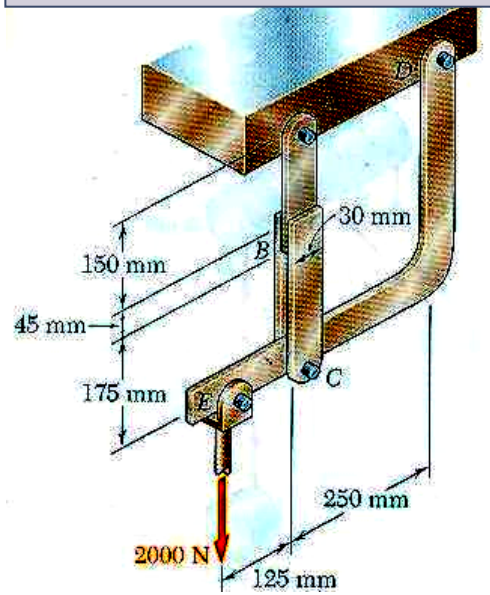
- Yüklemelerdeki belirsizlikler ve değişkenlikler
- Analizlerdeki hatalar (yanılmalar) ve belirsizlikler
- Tekrarlı yükleme durumları
- Hasar tipleri
- Malzeme üzerindeki bozucu etkiler ve onarım gereklilikleri
- Can ve mal güvenliği/emniyeti
- Makinenin fonksiyonelliği

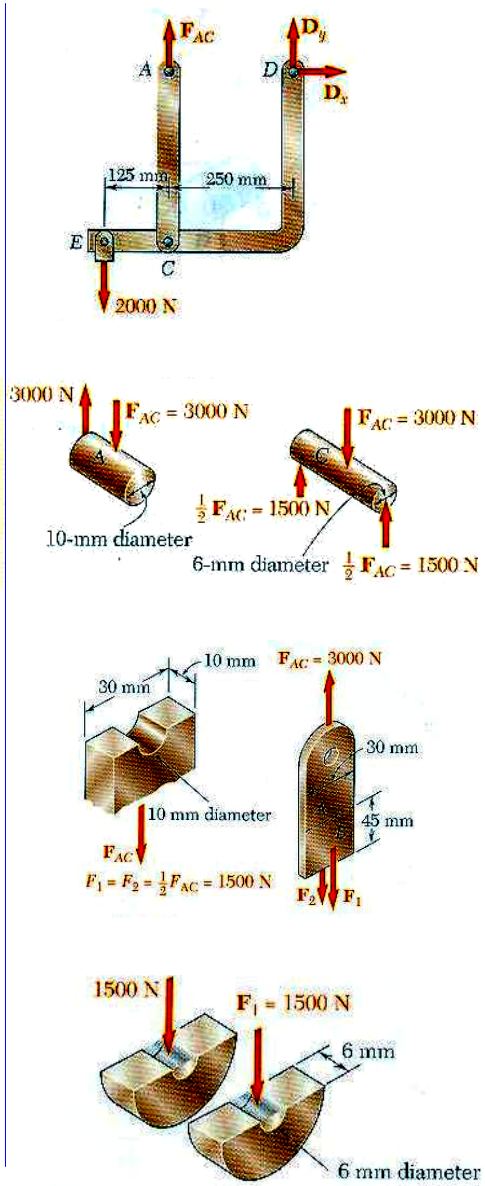
n=Emniyet katsayısı/ faktörü (factor of safety)

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma_{ç}}{\sigma_{em}} = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek :

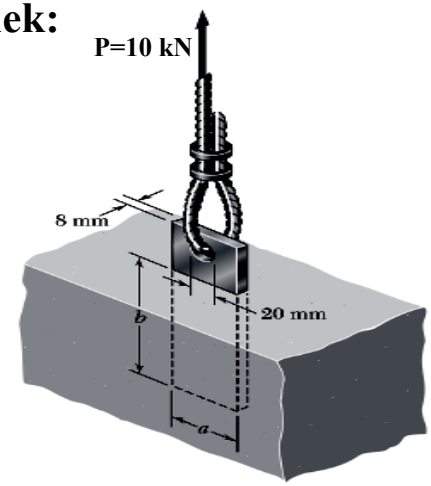




Şekildeki askı sisteminde ABC kısmının üst parçası 10 mm alt parçaları 6 mm kalınlığındadır. Üst ve alt parçaları B noktasında yapıştırmak için epoksi reçine kullanılmıştır. A daki pim 10 mm ve C deki pim 6 mm çapındadır. Buna göre; a) A ve C pimlerindeki kayma gerilmelerini, b) ABC kısmındaki en büyük normal gerilmeyi, c) B deki yapışma yüzeylerindeki ortalama kayma gerilmesini, d) ABC kısmı için C noktasındaki yatak gerilmesini bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



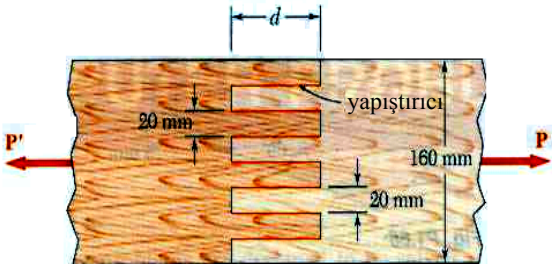
P=10 kN yük taşıyan bir halat 8 mm kalınlığındaki çelik bir plaka ile beton bir duvara bağlanmıştır. Çelik plakanın çekme mukavemeti 250 MPa, plaka ile beton arasındaki kayma çekme mukavemeti 2 MPa ve emniyet katsayısı n=3.6 olduğuna göre; yükün emniyetle taşınabileceği ***a*** ve ***b*** değerleri ne olmalıdır.

$$\sigma_{em} = \frac{250}{3{,}6} \qquad \tau_{em} = \frac{2}{3{,}6}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10000}{(a-20)\times 8} = \frac{250}{3{,}6} \qquad \tau = \frac{P}{A} = \frac{10000}{[2(a+8)]b} = \frac{2}{3{,}6}$$

a=38mm b=195,6mm

Örnek:



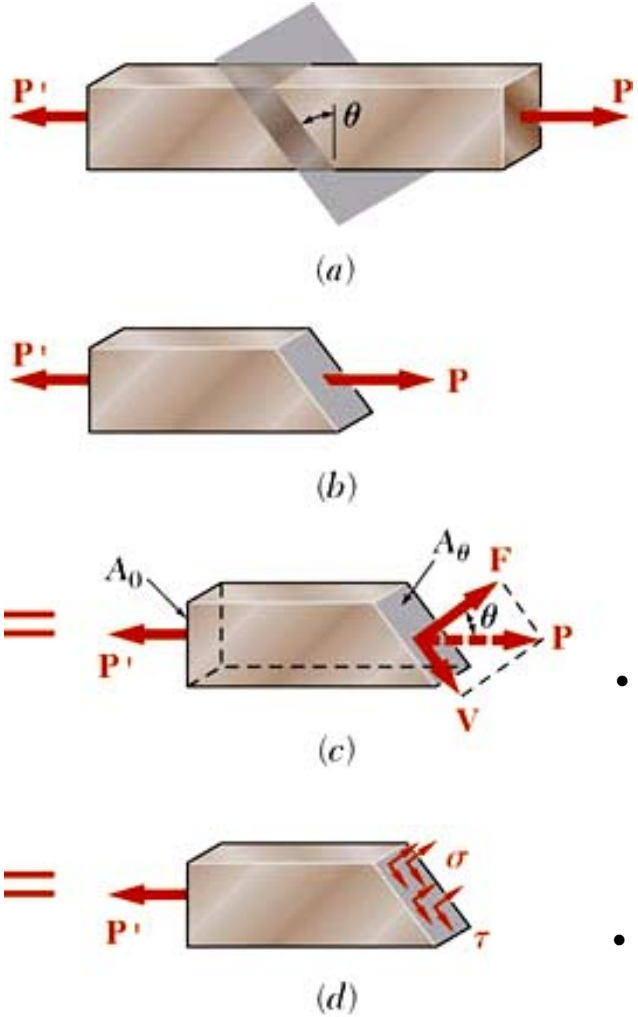
İki ahşap parça bir yapıştırıcı ile girinti ara yüzeylerinden birbirlerine bağlanmışlardır. Yapıştırıcıdaki ortalama kayma gerilmesi değeri 820 kPa değerine ulaştığında bağlantının koptuğu bilindiğine göre P=7.6 kN'luk bir yükün bağlantı tarafından emniyetle taşınması için "***d*** " mesafesi ne olmalıdır. Ahşap parçaların kalınlıkları 22 mm'dir.

Kesmeye çalışan 7 tane arayüzey mevcuttur.

$$\tau_{ort} = \frac{P}{A} \rightarrow 0{,}82 = \frac{7600}{7\times 22\times d} \rightarrow d = 60{,}2mm$$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Eğik Düzlemde Gerilmeler (Stress on an Oblique Plane)



$$F = P\cos\theta \qquad V = P\sin\theta$$

- Eğik düzlemde ortalama *normal* ve *kayma* gerilmeleri;

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta$$

- En büyük normal gerilme referans kesme düzlemi parçanın eksenine dik konumda iken (θ=0)meydana gelir.

$$\sigma_{max} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}_0} \qquad \tau = 0$$

- En büyük kayma gerilmeleri eksene göre $\pm 45^o$ lik açılarda meydana gelir.

$$\tau_{max} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}_0}\sin 45\cos 45 = \frac{\mathbf{P}}{2\mathbf{A}_0}\ , \qquad \sigma = \frac{\mathbf{P}}{2\mathbf{A}_0}$$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Fifth Edition

CHAPTER

2

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

2.1 Eksenel Yüklemede Gerilme ve Birim Şekil Değiştirme

(Stress and Strain– Axial Loading)

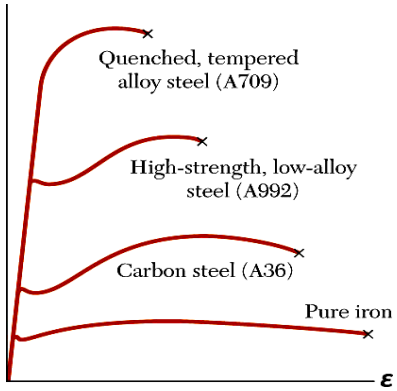
- Bir yapının veya makinenin uygunluğuna sadece meydana gelen gerilmelere ile değil aynı zamanda oluşan deformasyonlara da bakılarak karar verilir. Bunun için statik analiz tek başına yeterli değildir.
- Yapıların/elemanların şekil değiştirilebilir olması, statikçe belirsiz (hiperstatik) problemlerde bilinmeyen iç kuvvetlerin ve tepki kuvvetlerinin bulunabilmesine olanak sağlar.
- Bir elemandaki gerilme dağılımının tespiti elemandaki deformasyonların da incelenmesini gerekli kılar.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Gerilme Şekil değiştirme testi (Stress-Strain Test)

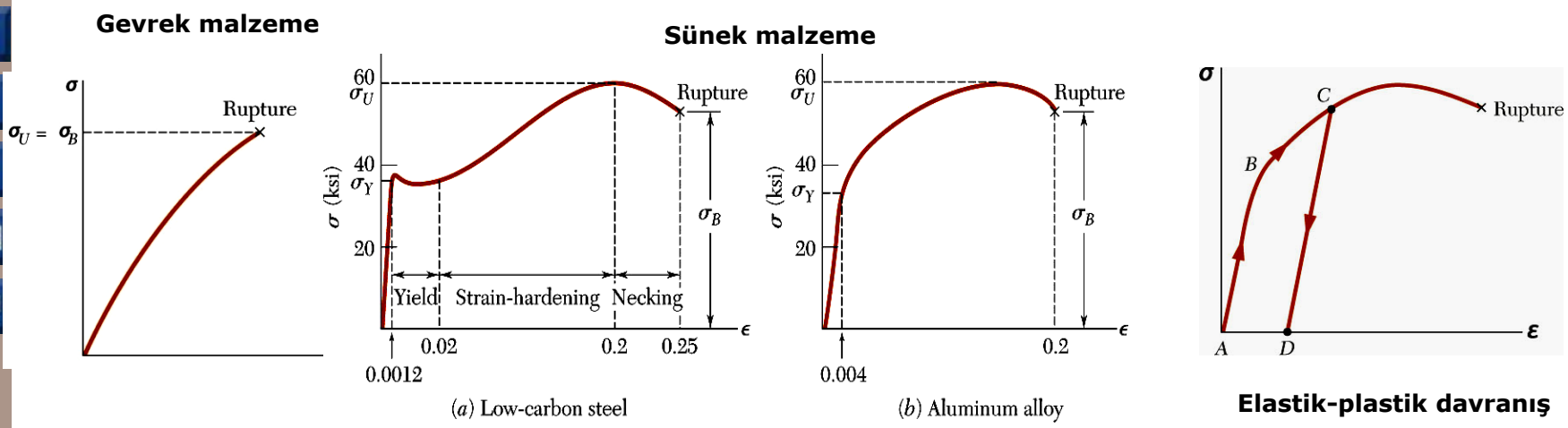
Fig 2.7 This machine is used to test tensile test specimens, such as those shown in this chapter.

Fig 2.8 Test specimens with tensile load.



- Mukavemet alaşımlamadan, ısıl işlemden veya üretim prosesinden etkilenir ancak direngenlik/elastisite modülü etkilenmez veya çok çok az etkilenir.

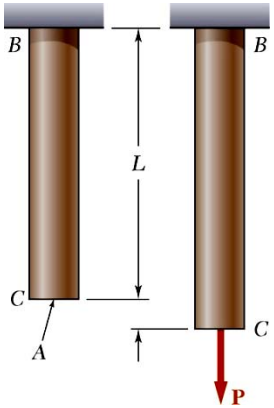
Elastik bölgede: $\sigma = E\varepsilon$



Elastik-plastik davranış

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Eksenel yüklemede Uzamalar ve Poisson Oranı



Hooke Bağıntısından:

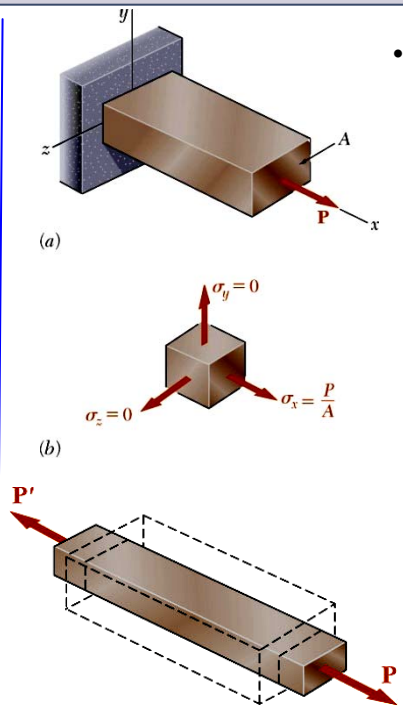
$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Birim şekil değiştirmenin tanımından:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Bu iki ifadenin eşitliğinden, şekil değiştirme (uzama): $\delta = \dfrac{PL}{AE}$

Çubuk eksenin boyunca yüklemede,
kesitte veya malzeme özelliklerinde değişim varsa: $\delta = \sum_i \dfrac{P_i L_i}{A_i E_i}$



- Eksenel yüke maruz ince bir çubukta:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

- İzotropik bir malzemede çekme yönünde uzamalar meydana gelirken diğer yönlerde kısalmalar (büzüşme) meydana gelir.

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

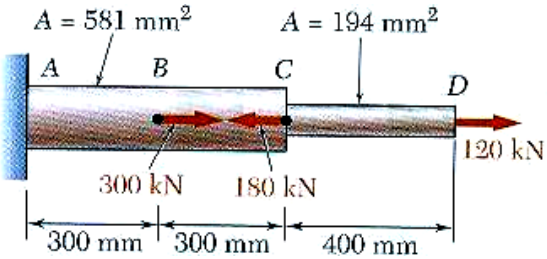
- Bu durumda Poisson oranı şöyle ifade edilir:

$$\nu = \left|\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}\right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek: **Verilen yükleme durumu için şekildeki çelik çubuğun deformasyonunu bulunuz.**

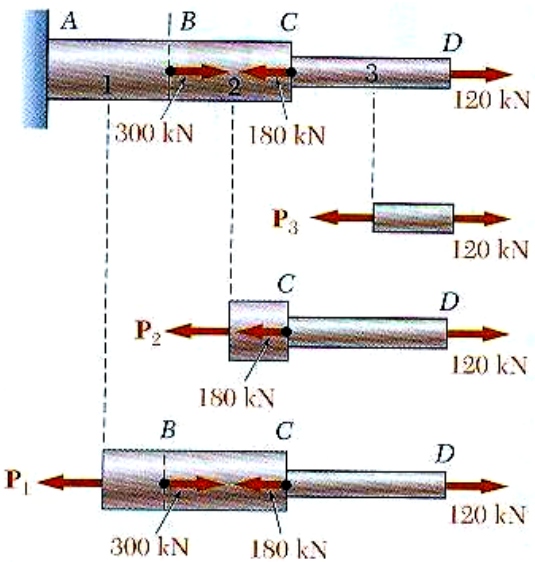


$$E = 200\ GPa$$

$$L_1 = L_2 = 300\ \text{mm} \qquad L_3 = 400\ mm$$

$$A_1 = A_2 = 580\ \text{mm}^2 \qquad A_3 = 190\ mm^2$$

$$P_1 = 240\times 10^3\ N,\quad P_2 = -60\times 10^3\ N,\quad P_3 = 120\times 10^3\ N$$



Toplam deformasyon,

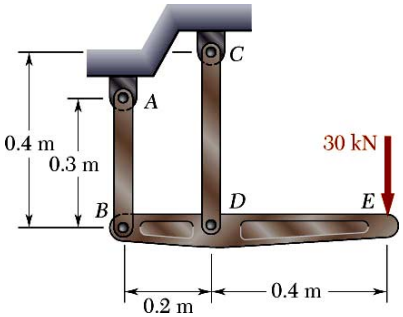
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$

$$= \frac{1}{200\times 10^3}\left[\frac{(240\times 10^3)300}{580} + \frac{(-60\times 10^3)300}{580} + \frac{(120\times 10^3)400}{194}\right]$$

$$= 1.7\ mm.$$

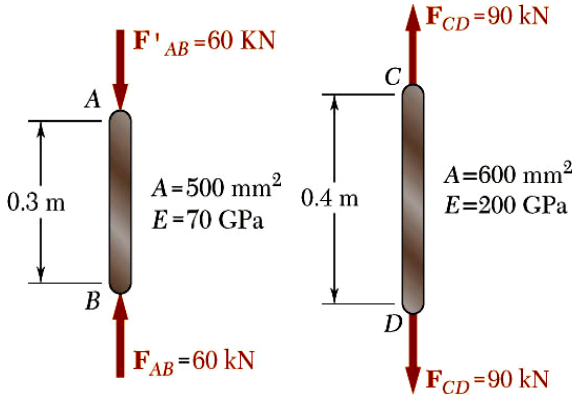
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek problem:



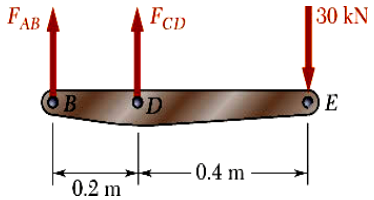
BDE rijit çubuğu *AB* ve *CD* elemanları ile sabit bir yüzeye bağlanmıştır.

Alüminyum olan (E = 70 GPa) *AB* elemanının kesit alanı 500 mm^2'dir. Çelik (E = 200 GPa) *CD* elemanının kesit alanı ise 600 mm^2'dir. 30-kN'luk kuvvete karşılık; *B, D* ve *E* noktalarının yer değiştirmesini bulunuz.



Çözüm:

BDE için Serbest Cisim Diyagramı



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$0 = -(30\text{kN}\times 0.6\text{m}) + F_{CD}\times 0.2\text{m}$$

$$F_{CD} = +90\text{kN} \quad \textit{tension}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0$$

$$0 = -(30\text{kN}\times 0.4\text{m}) - F_{AB}\times 0.2\text{m}$$

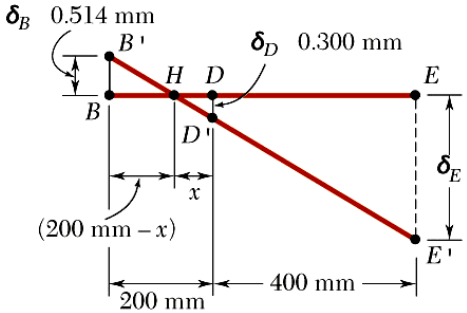
$$F_{AB} = -60\text{kN} \quad \textit{compression}$$

D noktasının yer değiştirmesi

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90\times 10^3\,\text{N})(400\text{ mm})}{(600\text{ mm}^2)(200\times 10^3\text{ MPa})} = 0.3\text{ mm}$$

B noktasının yer değiştirmesi

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60\times 10^3\,\text{N})(300\text{ mm})}{(500\text{ mm}^2)(70\times 10^3\text{ MPa})} = -0.514\text{ mm}$$



Üçgen benzerliklerinden

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \quad ; \frac{0.514\text{ mm}}{0.300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x}$$

$$\boxed{x = 73.7\text{ mm}}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \quad ; \frac{\delta_E}{0.300\text{ mm}} = \frac{(400 + 73.7)\text{mm}}{73.7\text{ mm}}$$

$$\boxed{\delta_E = 1.928\text{ mm}}$$

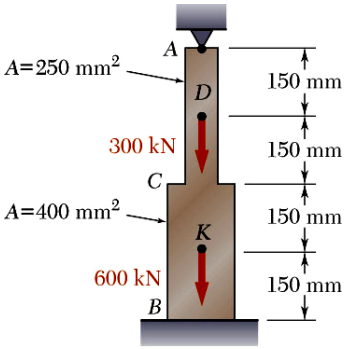
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

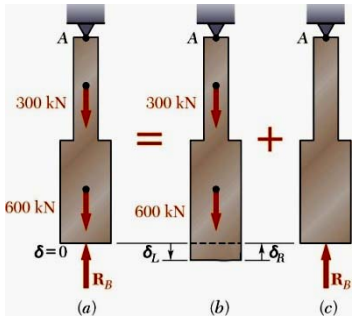
Statikçe belirsiz (hiperstatik) problemler-Static Indeterminacy

Bilinmeyen iç kuvvetlerin ve reaksiyon kuvvetlerinin sadece statik denge denklemeleri ile bulunamadığı (yani ilave denklemelere ihtiyaç varsa) problemlere, statikçe belirsiz problemler denir.

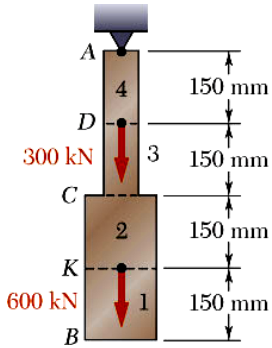
Örnek

Verilen yükleme durumu için *A* ve *B* noktalarındaki reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.





Süperpozisyon prensibi



(b) kısmı için çözüm:

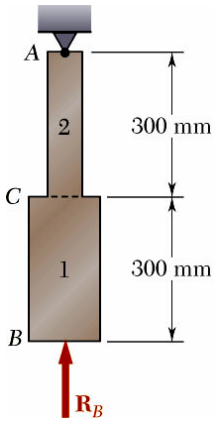
$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600\times10^3\,\text{N} \quad P_4 = 900\times10^3\,\text{N}$$

$$A_1 = A_2 = 400\ \text{mm}^2 \quad A_3 = A_4 = 250\ \text{mm}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 150\,\text{mm}$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(0 + \frac{600\times10^3\times150}{400} + \frac{600\times10^3\times150}{250} + \frac{900\times10^3\times150}{250}\right)$$

$$= \frac{1.125\times10^6}{E}$$



(c) kısmı için çözüm:

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400\ \text{mm}^2 \quad A_2 = 250\ \text{mm}^2$$

$$L_1 = L_2 = 300\,\text{mm}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{-R_B\times300}{400} + \frac{-R_B\times300}{250}\right)$$

$$= -\frac{1.95\times R_B}{E}$$

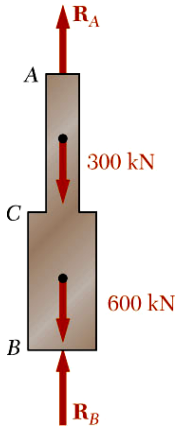
Sınır şartı:

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125\times10^6}{E} - \frac{1.95\times R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577\times10^3\,\text{N} = 577\,\text{kN}$$

R_A için:



$$\sum F_y = 0$$

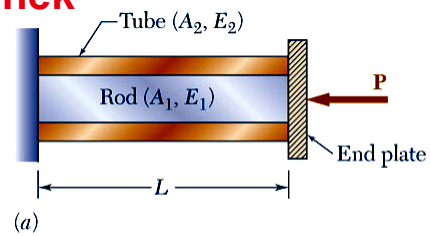
$$= R_A - 300 - 600 + 577$$

$$R_A = 323\,\text{kN}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= 323\,\text{kN} \\ R_B &= 577\,\text{kN} \end{aligned}}$$

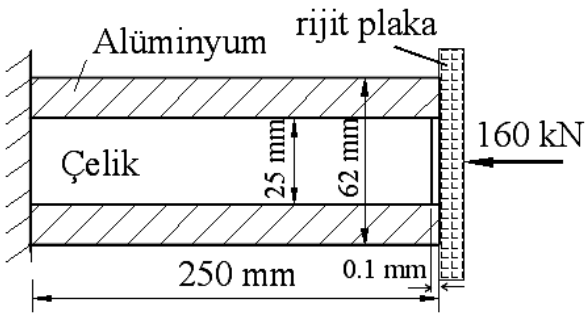
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek



Rijit bir plaka ile sıkıştırılan ve boşluklu olarak iç içe geçmiş tüp ve çubuktaki gerilmeleri verilen parametreler cinsinden bulunuz.

Örnek



İç içe geçirilmiş bir alüminyum tüp ile bir çelik çubuk şekildeki gibi rijit bir plaka ile eksenel yönde yüklenmektedir. Çelik çubuk tüpten **0.1** mm daha kısadır. Yani başlangıçta rijit blok sadece Alüminyum tüpe temas etmektedir. Buna göre;

a) Alüminyum tüpün ve çelik çubuğun taşıdıkları yük miktarlarını bulunuz.

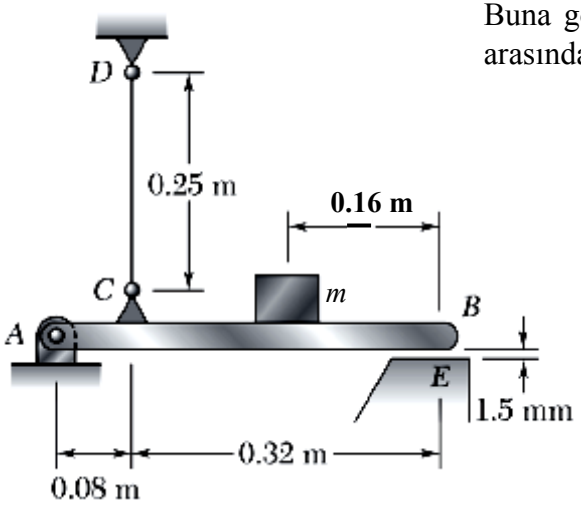
b) Alüminyum tüpte ve çelik çubukta meydana gelen gerilmeleri bulunuz.

c) Her iki parçada eksenel yönde meydana gelen şekil değişim miktarını bulunuz.

Ea=70 GPa, Eç=200 GPa.

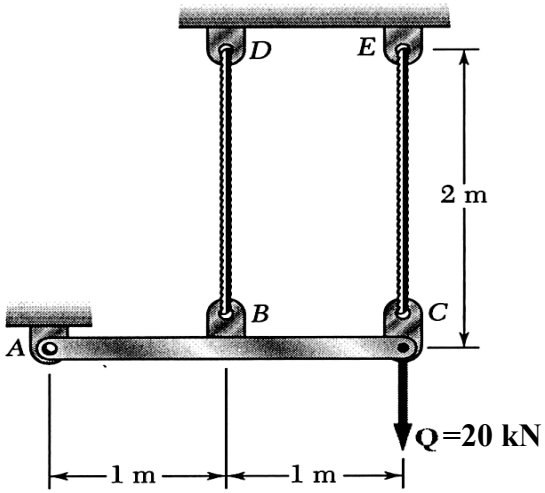
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek



- AB rijit çubuğu 2 mm çapındaki çelik bir tel (E=200 GPa) ile şekildeki gibi yatayda tutulmaktadır. Buna göre; rijit çubuğun üzerine B noktasından itibaren 0.16 m mesafede konulan bir cismin B-E arasındaki 1.5 mm'lik açıklığı kapatabilmesi için kütlesi (m) ne olmalıdır?

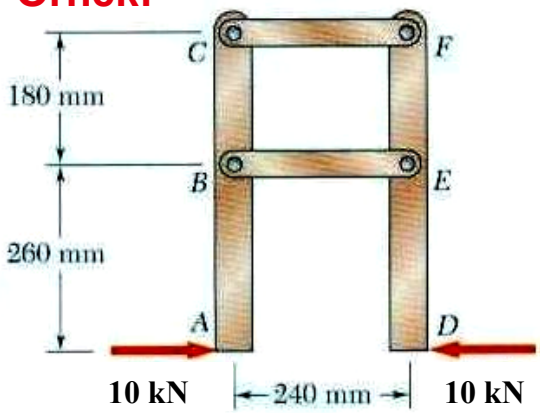
Örnek



- Şekildeki yükleme durumu için; ABC rijit çubuğuna bağlı, her biri 100 mm^2 kesit alanına sahip BD ve CE çelik halatlarının (E=200 GPa) uzama miktarlarını bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



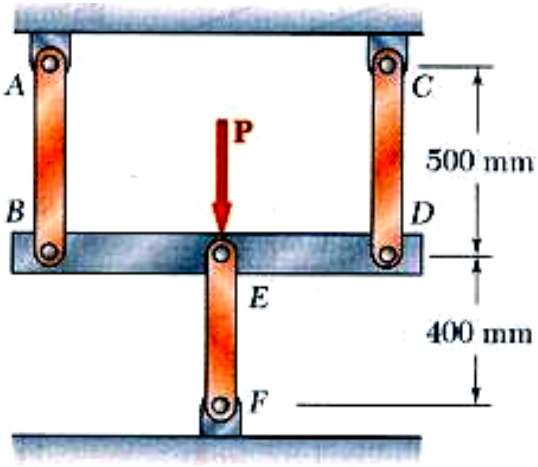
Şekildeki ABC ve DEF elemanları, kesitleri 15 x 35–mm ve elastisite modülleri 200 GPa olan BE ve CF çelik çubukları ile bağlanmışlardır. Verilen yükleme durumu için;

a) BE ve CF çubuklarının boylarındaki değişimleri

b) Tüm pimler eşit çapta olduğuna göre emniyetli pim çapını bulunuz. (pimler için emniyetli kayma mukavemet değeri 60 MPa'dır)

Not: ABC ve DEF elemanları rijit kabul edilecektir.

Örnek:



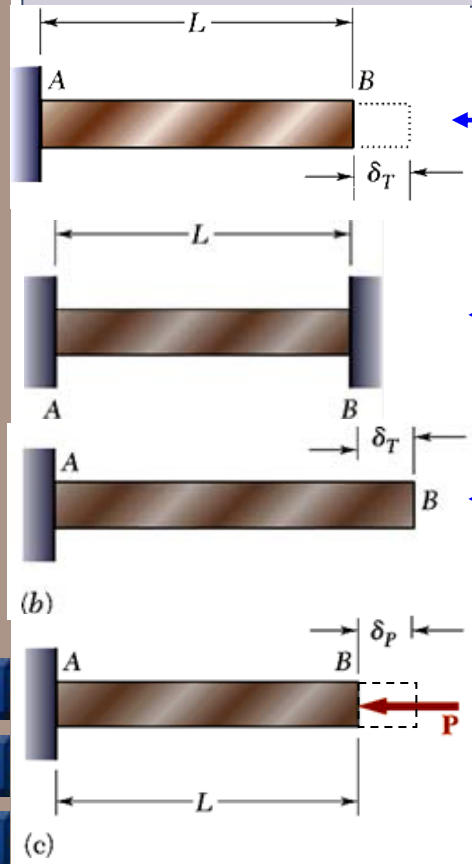
Şekildeki **AB, CD** ve **EF** çubuklarının malzemesi çelik olup Elastisite Modülü *E=200* GPa'dır. BED rijit bir çubuğuna E noktasında uygulanan yük değeri **P=36 kN**'dur. AB ile CD'nin kesit alanları 200 mm^2 ve EF'nin kesit alanı 625 mm^2 olduğuna göre;

a) EF çubuğunun boyundaki değişimi,

b) Her bir çubuktaki gerilme değerini bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Termal Gerilmeler (Thermal Stresses)



Sıcaklık değişimi termal birim şekil değiştirmeler dolayısı ile çubuk boyunda değişimler meydana getirir. Çubuğun uzaması kısıtlanmadığı sürece gerilme meydana gelmez.

Ancak yandaki gibi serbestçe uzama engellenmişse reaksiyon kuvvetleri ve gerilmeler meydana gelir. Çözüm süperpozisyon yöntemi ile yapılabilir.

Sıcaklık farkından kaynaklanan değişim:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Eksenel kuvvetten kaynaklanan değişim:

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

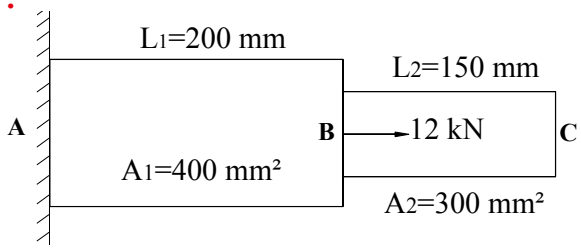
$$\alpha(\Delta T)L - \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = AE\alpha(\Delta T)$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

α = ısıl genleşme katsayısı (1 /°C)

Örnek :



Şekildeki yüklemeye maruz çelik (E=200 GPa, α=11.7 x 10-6 /°C) kademeli mil başlangıçta oda sıcaklığında (25°C) iken 125°C'ye ısıtılmıştır. Buna göre;

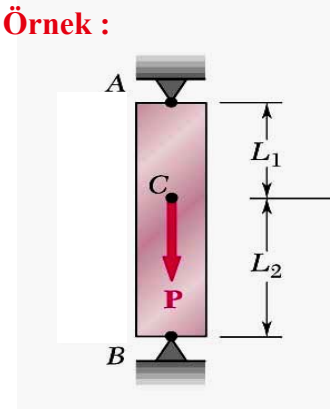
a) AB ve BC kısımlarındaki gerilme değerlerini bulunuz.

b) B noktasının yer değiştirmesini bulunuz.

(E=200 GPa, α=11.7 x 10-6 /°C)

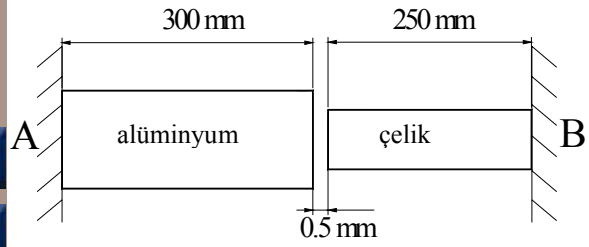
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek :



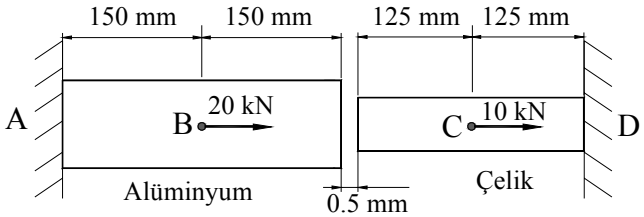
Kesit alanı 400 mm^2 olan bir çubuğa önce şekildeki gibi P=15 kN luk bir kuvvet etkimiştir. Çubuk oda sıcaklığından (25°C) 50 °C ye çıkarıldığında A ve B noktalarında meydana gelen tepki kuvvetleri ne olur? (L_1=125 mm, L_2=225 mm, E=200 GPa, ν=0.3, α=17.3 x 10^{-6} /°C).

Örnek :



Oda sıcaklığında (20°C) aralarında 0.5 mm'lik boşluk bulunan alüminyum ve çelik çubuklar 140°C'ye ısıtıldıklarında; alüminyum çubukta meydana gelecek gerilme değerini ve boy değişimini bulunuz. (Aç=2000 mm^2, Eç=75 GPa, αç=23 x 10^{-6} /°C , Aa=800 mm^2, Ea=190 GPa, αa=17.3 x 10^{-6} /°C)

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

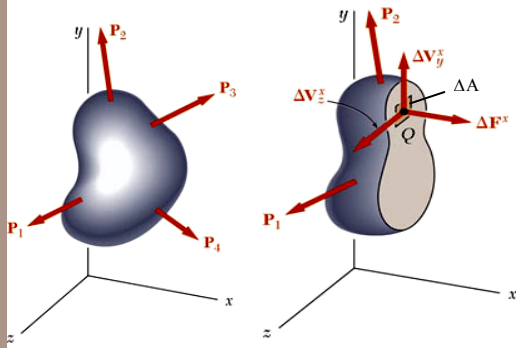


Başlangıçta oda sıcaklığında (T_1=20°C) bulunan alüminyum çubuk ile çelik çubuk arasında 0,5 mm'lik bir boşluk bulunmaktadır. Verilen yükleme durumunda; aralarındaki boşluğun kapanabilmesi için çubukların son sıcaklığı T_2 ne olmalıdır?

Alüminyum	**Çelik**
A=2000 mm^2	A=800 mm^2
E=75 GPa	E=190 GPa
α=23 x 10^{-6} /°C	α=17.3 x 10^{-6} /°C

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Genel Yükleme Durumunda (3-Boyutlu) Gerilmeler ve Şekil değiştirmeler

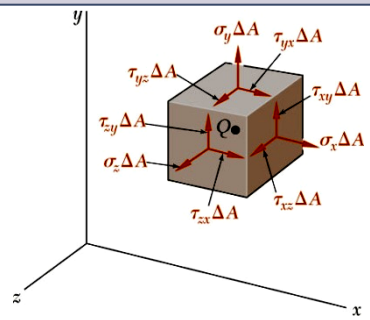


Gerilme bileşenleri :

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$



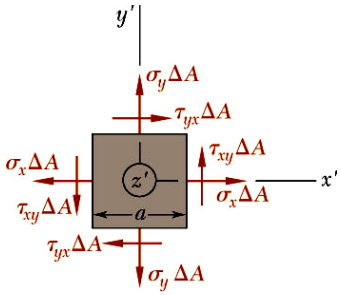
Karşılıklı yüzeylerde (görünen ve görünmeyen) denge için, eşit fakat zıt yönlü gerilmeler mevcuttur.

Gerilmelere karşılık gelen kuvvetler denge denklemlerini sağlamalıdır: $\longrightarrow$

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

- 2-Boyutlu bir gerilme elemanında *z*-eksenine göre moment alınırsa :



$$\sum M_z = 0 = (\tau_{xy}\Delta A)a - (\tau_{yx}\Delta A)a$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

benzer şekilde; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ $\longrightarrow$

Böylece bir noktadaki genel gerilme durumu **6** gerilme elemanı (bileşen) ile temsil edilebilir.

- Çok-eksenli yüklemeye maruz bir elemanda, gerilmelere karşılık gelen *normal* şekil değiştirmeler süperpozisyon prensibi (*principle of superposition)* ile bulunabilir. Bunun için şu kabuller yapılır; a) "*şekil değiştirme", gerilme* ile lineer değişir b) deformasyonlar küçüktür

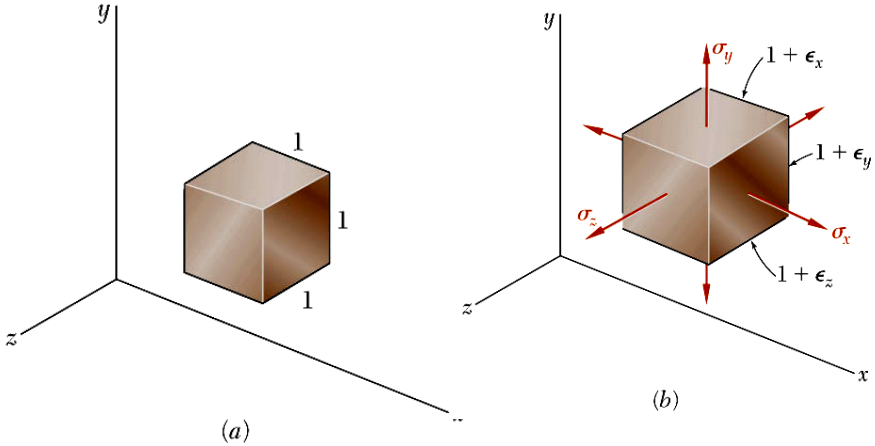
Buna göre, sıcaklık değişiminden kaynaklanan şekil değişimini de dikkate alarak;

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta T \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta T \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\,\Delta T
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Genel Hooke Bağıntıları

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Hacimsel Modül (Dilatation: Bulk Modulus)



- Gerilmesiz duruma göre hacimsel değişim:

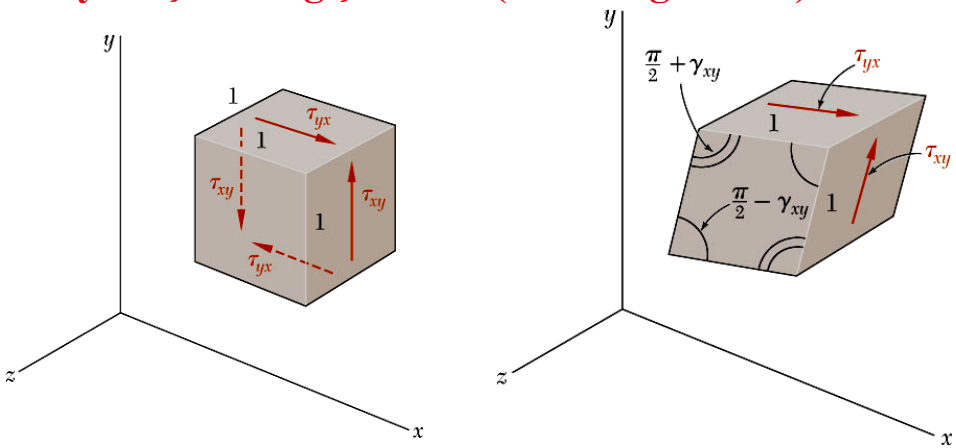
$$e = 1 - \left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\right] = 1 - \left[1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right]$$
$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$

- Uniform hidrostatik basınca maruz bir eleman için;

$$e = -p\frac{3(1-2\nu)}{E} = -\frac{p}{k} \longrightarrow k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \textit{hacimsel modül (bulk modulus)}$$

Hidrostatik basınç durumunda hacimsel değişim negatif olmalıdır. Bundan dolayı; $0 < \nu < \frac{1}{2}$

- **Kayma şekil değiştirmesi (Shearing Strain)**



$$\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$$

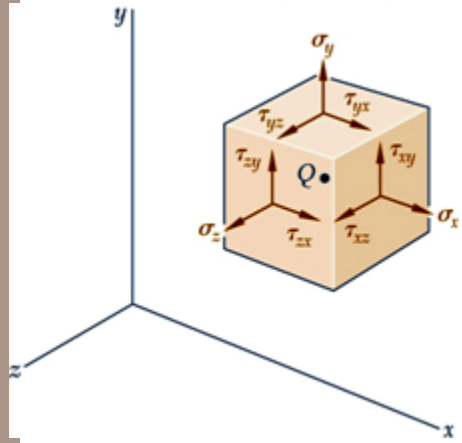
$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Kaymada Hooke Bağıntıları

G: kayma modülü $\quad G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Genel Hooke Bağıntıları: Özet



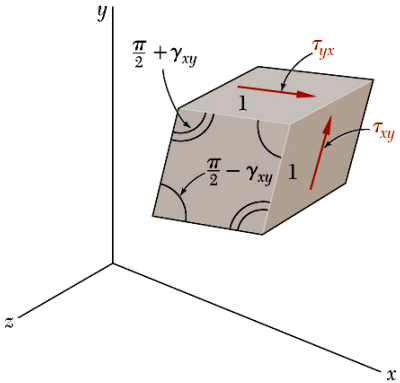
Normal şekil değiştirmeler:

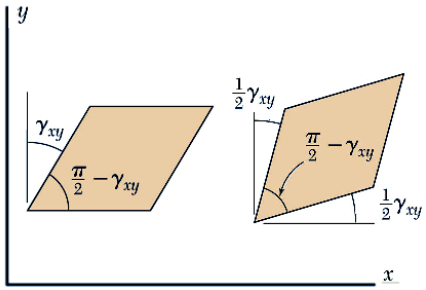
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\,\Delta T$$

Kayma şekil değiştirmeleri:



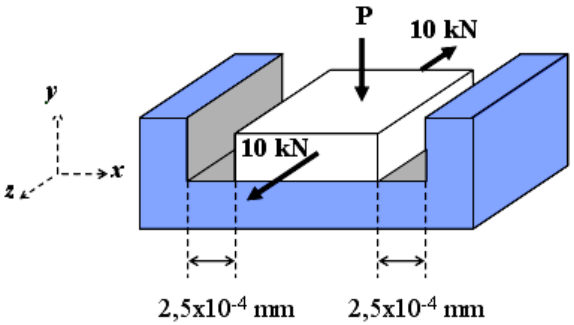


$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}$$

Örnek :

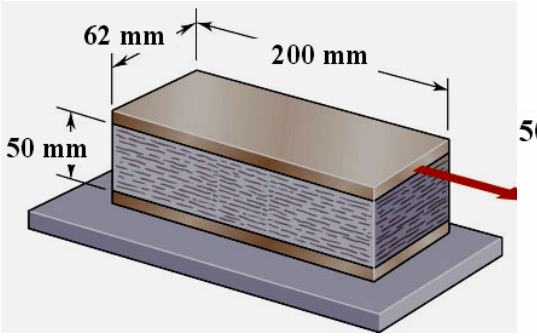


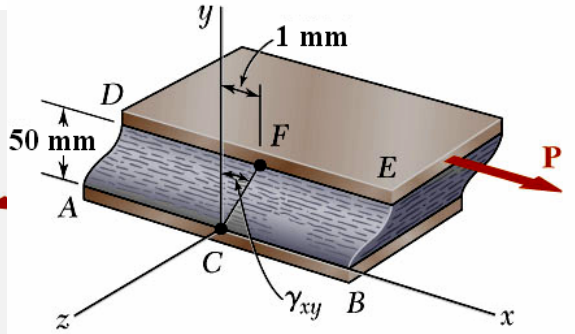
Şekilde verilen 50 x 50 x 10 mm boyutlarındaki **Alüminyum** blok bir kanalın içine yerleştirilmiş ve *z*-doğrultusunda 10kN'luk çeki kuvvetine, *y*-doğrultusunda ise ***P*** bası kuvvetine maruz bırakılmıştır. *x*-doğrultusunda gerilme oluşmaması için; ***P*** yükünün maksimum değeri ne olmalıdır? Bu durumda bloğun *y*-doğrultusundaki kenar uzunluğu ne kadar değişir?

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:

Dikdörtgen prizması şeklindeki bir blok (G = 630 MPa) iki rijit plakaya yapıştırılmıştır. Alt plaka sabit iken, üst plakaya bir ***P*** kuvveti uygulanmıştır. ***P***'nin etkisi ile üst plaka 1 mm hareket ettiğine göre; malzemedeki ortalama kayma şekil değiştirmesini ve uygulanan P kuvvetini bulunuz.





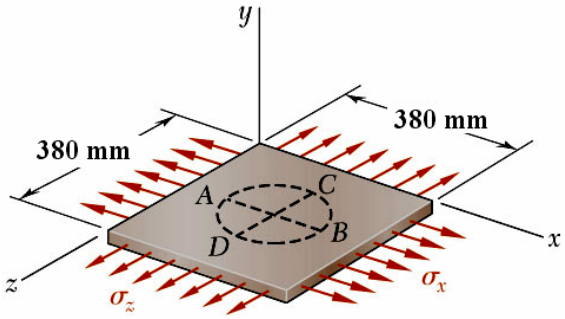
$$\gamma_{xy} \approx \tan\gamma_{xy} = \frac{1\ mm}{50\,mm.} \qquad \gamma_{xy} = 0.02\,rad$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (630MPa)(0.02\,rad) = 12.6\ MPa$$

$$P = \tau_{xy}A = (12.6\ MPa)(2008\,mm)(62\,mm)$$
$$= 156.2\times10^{3}\ N$$

Örnek:

Şekildeki plakanın üzerine d =225 mm çapında bir çember çizilmiştir. 18 mm kalınlığındaki plakada düzlemsel kuvvetlerin etkisiyle σ_x = 84 MPa ve σ_z = 140 MPa'lık gerilmeler meydana gelmiştir. E = 70 GPa ve ν = 1/3, olduğuna göre: a) AB çapındaki, b) CD çapındaki, c) plakanın kalınlığındaki ve d) plakanın hacmindeki değişimi bulunuz.



Genel Hooke bağıntılarından

Normal birim şekil değiştirmeler;

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$
$$= \frac{1}{70\times10^{3}\,MPa}\left[84 - \frac{1}{3}(0+140)\right]$$
$$= +0.533\times10^{-3}\,mm/mm$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$
$$= -1.067\times10^{-3}\,mm/mm$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$
$$= +1.600\times10^{-3}\,mm/mm$$

- **Deformasyonlar ;**

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (+0.533\times10^{-3})(225\,mm) = 0.12\,mm$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (+1.600\times10^{-3})(225\,mm) = 0.36\,mm$$

$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.067\times10^{-3})(18\,mm) = -0.0192\,mm$$

- **Hacimsel değişim:**

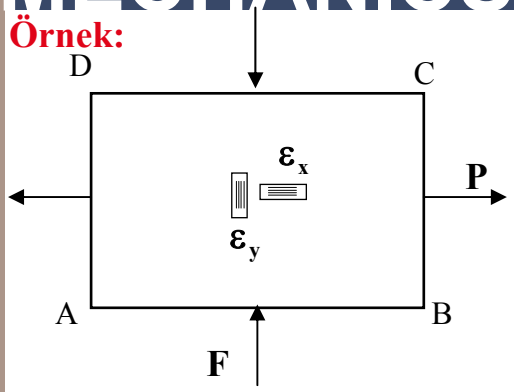
$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1.067\times10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = 1.067\times10^{-3}(380\times380\times18)$$

$$\boxed{\Delta V = +2733\,mm^3}$$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:

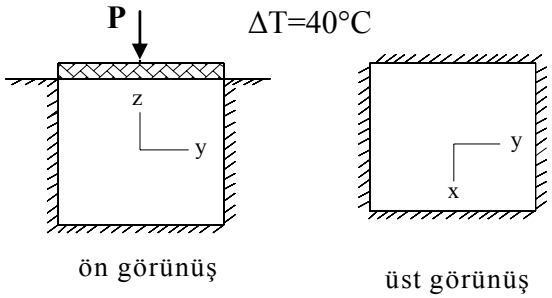


50 x 30 x 12 mm boyutlarındaki alüminyum bir plaka (E=75 GPa, υ=0.3) şekildeki gibi yüklenmiştir. Plakaya yapıştırılmış bulunan uzama tellerinden okunan değerler $\boldsymbol{\varepsilon}_x = 350 \times 10^{-6}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_y = -125 \times 10^{-6}$ olduğuna göre;

a) **P** ve **F** kuvvetlerini bulunuz.

b) **AC** diyagonalindeki değişimi ve hacimsel değişimi hesaplayınız.

Örnek:

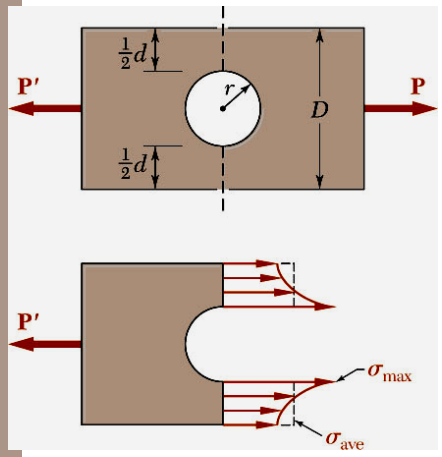


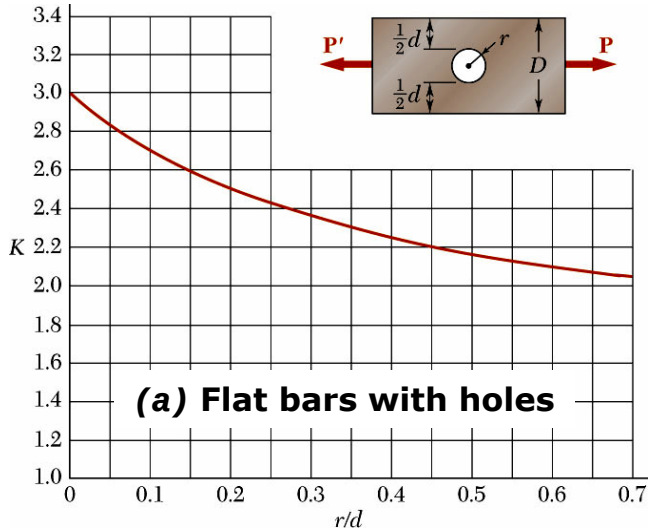
Bir kenar uzunluğu 10 mm olan çelik bir küp şekildeki gibi bir oyuğa yerleştirilmiştir. Küpün x- ve y-yönündeki şekil değiştirmeleri engellenmiştir. Verilen yükleme durumu için küpte hacimsel bir değişim olmaması için **P** ne olmalıdır. (ΔV=0) bulunuz.

(E=200 GPa, ν=0.3, α=17.3 x 10^{-6} /°C).

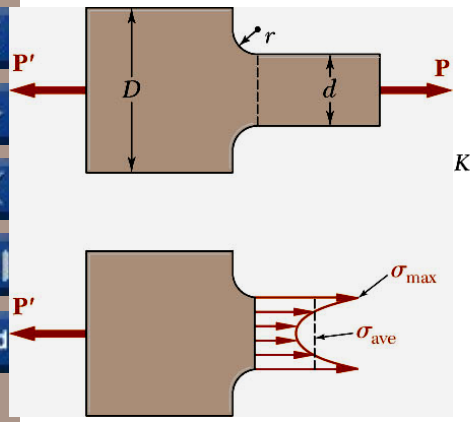
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

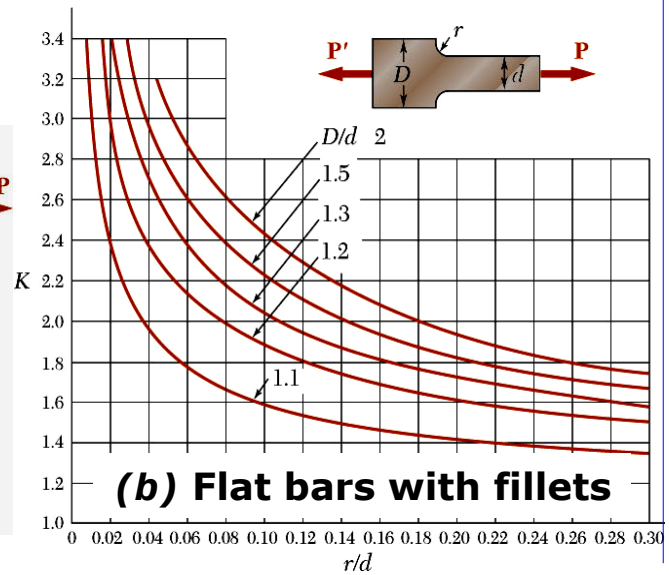
Gerilme Yığılmaları (Stress Concentration)



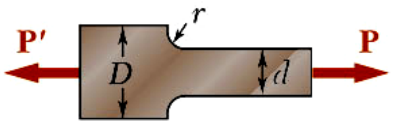


$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$





Örnek :



t=10 mm, d= 40 , D=60 mm, r = 8 mm. Ve izin verilebilir normal gerilme 165 MPa ise P=?

$$\frac{D}{d} = \frac{60\,\text{mm}}{40\,\text{mm}} = 1.50 \qquad \frac{r}{d} = \frac{8\,\text{mm}}{40\,\text{mm}} = 0.20$$

$$K = 1.82$$

- İzin verilebilir ortalama normal gerilme:

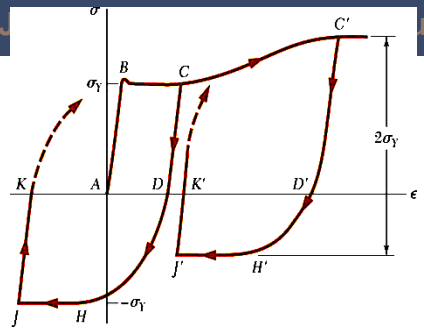
$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_{max}}{K} = \frac{165\,\text{MPa}}{1.82} = 90.7\,\text{MPa}$$

$$P = A\sigma_{ave} = (40\,\text{mm})(10\,\text{mm})(90.7\,\text{MPa})$$

$$= 36.3\times10^{3}\,\text{N} \qquad \boxed{P = 36.3\,\text{kN}}$$

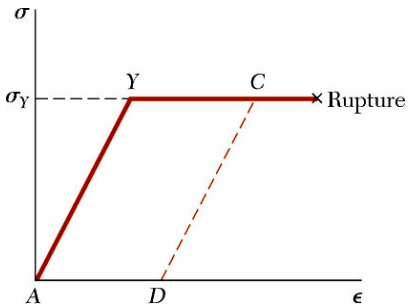
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

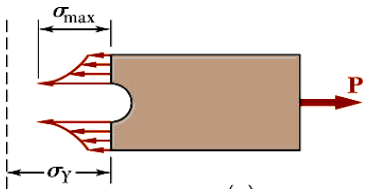
Elastoplastik Malzemeler: Gerilme ve Şekil Değiştirmeler



- Daha önceki analizler lineer "gerilme-şekil değiştirme" kabulüne dayanmıştır. Yani akma noktasının altındaki gerilmeler için analizler yapılmıştır.
- Bu yaklaşım gevrek malzemeler için iyi sonuçlar verir. Çünkü gevrek malzemeler akmaya uğramadan hasara uğrarlar.
- Sünek malzemelerde ise akma noktasının üzerindeki gerilmelerde plastik deformasyonlar meydana gelir.

- Plastik deformasyon analizleri yapılırken; ideal (perfect) elastoplastik malzeme kabulü yapmak çözümü basitleştirir.
- Elastoplastik malzemelerin deformasyonu iki bölge halinde göz önüne alınarak incelenir: elastic bölge ve plastik bölge.
- Akma gerilmesinin üzerindeki yüklemelerde kalıcı (permanent) deformasyonlar meydana gelir.

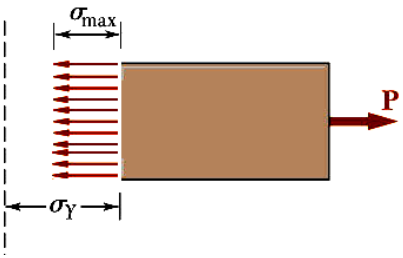


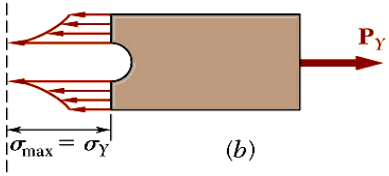


(a)

$$P = \sigma_{ave} A = \frac{\sigma_{max} A}{K}$$

Maksimum gerilme akma mukavemetinden küçük ise gerilmeler elastiktir.

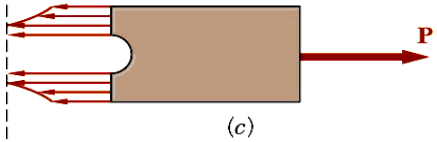




(b)

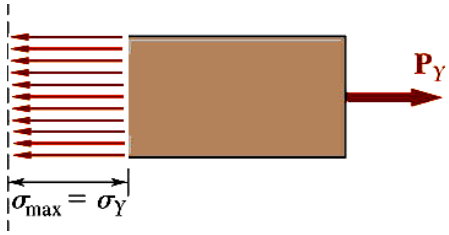
$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K}$$

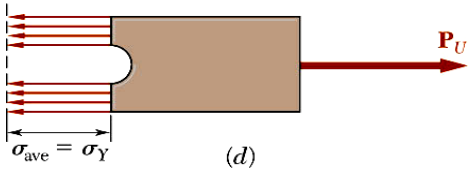
Maksimum elastik yüklemede, maksimum gerilme akma mukavemeti değerine ulaşılır.



(c)

Maksimum elastik yüklemenin üzerindeki yükler plastik bölgenin gelişmesine neden olur.





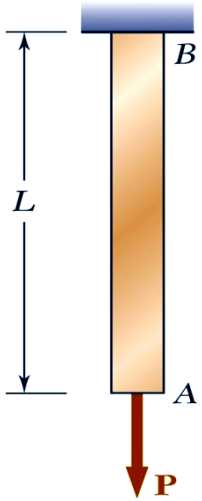
(d)

$$P_U = \sigma_Y A$$
$$= K P_Y$$

Yükleme artarsa, tüm kesitte akama mukavemetine eşit, uniform bir gerilme dağılımı meydana gelir.

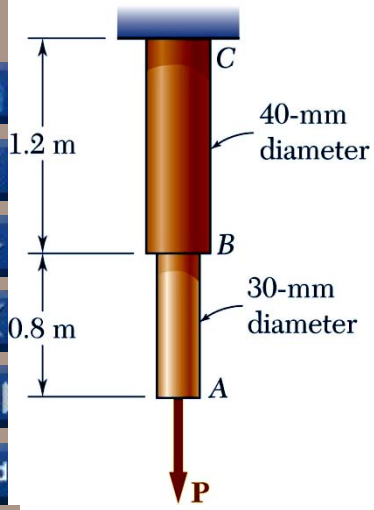
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



Boyu L=500 mm ve kesiti 60 mm^2 olan elastoplastik bir AB çubuğunun elastisite modülü E=200 GPa, akma mukavemeti $\boldsymbol{\sigma}_{ak}$ =300 MPa'dır. Çubuktaki uzama 7 mm oluncaya kadar P kuvveti arttırılmaktadır. P kuvveti kaldırıldığında kalıcı deformasyon miktarı ne kadar olur?

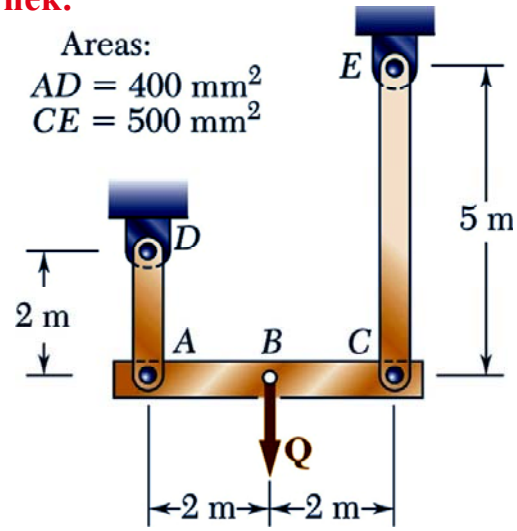
Örnek:



Şekildeki kademeli çelik çubuğun elastisite modülü E=200 GPa, akma mukavemeti $\boldsymbol{\sigma}_{ak}$ =250 MPa'dır. Çubuğa bir **P** kuvveti uygulanmış sonra kaldırılmıştır. Kalıcı deformasyon miktarı 2 mm olduğuna göre uygulanan **P** kuvvetini ve maksimum deformasyonu bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



Rijit bir ABC çubuğu iki çelik çubuk ile yatayda durmaktadır. B noktası yavaş yavaş arttırılan Q yükünün etkisiyle 10 mm yer değiştirdikten sonra sonra Q yükü kaldırılmaktadır. Elastoplastik düşey çubukların elastisite modülü E=200 GPa, akma mukavemeti σ_{ak} =300 MPa olduğuna göre;

a) Q yükünün maksimum değerini ve bu durumda ABC'nin konumunu bulunuz.

b) ABC kirişinin son konumunu çiziniz.

Ödev: Aynı soruyu AB=1 m ve BC=3 m için çözünüz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

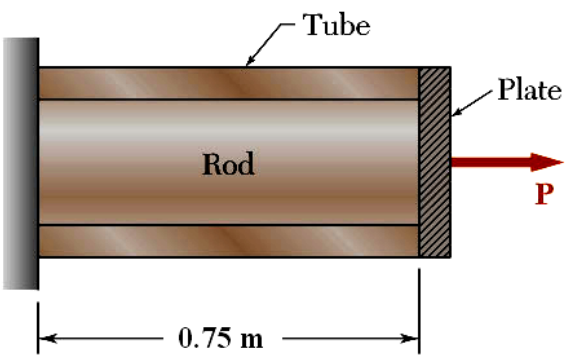
Artık Gerilmeler

- Eğer bir yapısal eleman/çubuk uniform olarak akma mukavemetinin üzerinde bir değere kadar yüklenip daha sonra yük boşaltılırsa, elemandaki tüm gerilmeler kaybolur (kalıcı deformasyona rağmen). Yani herhangi bir artık gerilme meydana gelmez.
- Yükleme ve boşaltma sonrası bir malzemede artık gerilmeler şu durumlarda meydana gelir:

  -eğer yapının sadece bir kısmı plastik deformasyona uğramış ise,

  -eğer farklı parçalar farklı plastik deformasyonlara uğramışsa.
- Artık gerilmeler ayrıca, düzgün (uniform) olmayan ısıtma ve/veya soğutmaya maruz yapı ve yapı elemanlarında da meydana gelir.

Örnek:



$A_r = 48\ mm^2$

$E_r = 210\ GPa$

$(\sigma_r)_Y = 250\ MPa$

$A_t = 62\ mm^2$

$E_t = 105\ GPa$

$(\sigma_t)_Y = 310\ MPa$

Şekilde eksenel yöndeki kesiti verilen, iç içe geçmiş elastoplastik tüp ve çubuktan oluşan sistem rijit bir plaka ile çekilmektedir. P kuvveti "0" dan 25 kN'a yavaş yavaş çıkarıldığına göre;

a) yapının kuvvet-deplasman diyagramını,

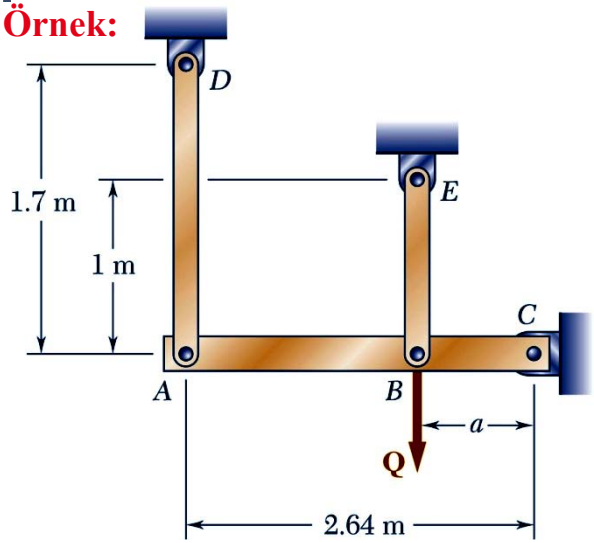
b) maximum uzamayı

c) kalıcı deformasyon miktarını,

d) tüp ve çubuktaki artık gerilmeleri bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



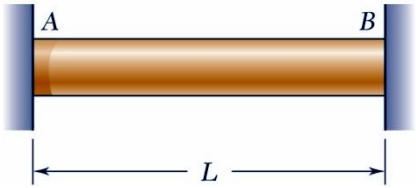
Rijit bir ABC çubuğu, AD ve BE çelik çubukları ile desteklenmiştir. AD ve BE çubuklarının kesitleri 37.5-mm x 6-mm, elastisite modülü E=200 GPa, akma mukavemeti $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ak}}$ =250 MPa dır. **Q** yükü 260 kN çıkarılıp sonra kaldırıldığında;

a) Çubuklardaki artık gerilmeleri bulunuz.

b) B noktasının son konumunu bulunuz. (a=0.64m)

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



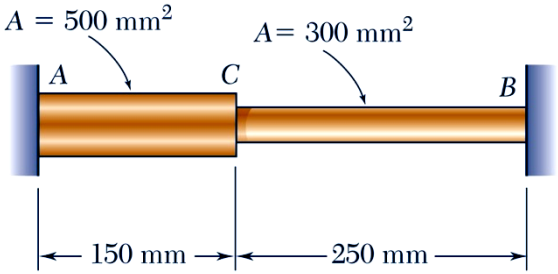
Şekildeki düzgün kesitli çelik çubuk A ve B noktalarında sabitlenmiştir. Çubuk 7 °C da gerilmesiz durmaktadır. Çubuğun elastisite modülü E=200 GPa, akma mukavemeti σ_{ak} =250 MPa ve ısıl genleşme katsayısı α=11.7 x 10-6 /°C olduğuna göre;

a) Sıcaklık 160 °C'ye çıkarıldığında çubuktaki gerilme değeri nedir?

b) Sıcaklık tekrar 7 °C'ye indirildiğinde çubuktaki gerilme değeri nedir?

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Örnek:



Şekildeki çelik ABC çubuğu A ve B noktalarında sabitlenmiştir. Çubuk 25 °C de gerilmesiz durmaktadır. Çubuğun elastisite modülü E=200 GPa, akma mukavemeti σ_{ak} =250 MPa ve ısıl genleşme katsayısı α=11.7 x 10-6 /°C olduğuna göre; Sıcaklık 150 °C'ye çıkarıldığında

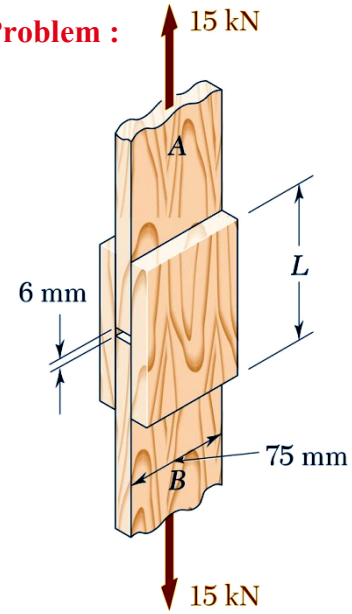
a) AC ve CB aralıklarındaki gerilmeleri bulunuz.

b) C noktasının yer değiştirmesini bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

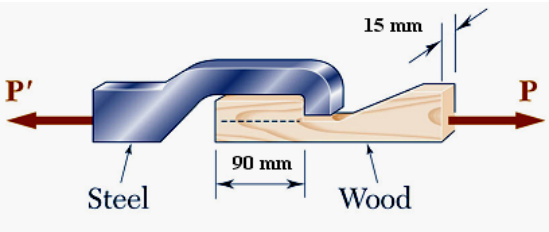
UYGULAMA: Örnek Problemler

Ör. Problem :



Şekildeki ahşap parçalar birbirlerine bir tutkal ile yapıştırılmıştır. Verilen yükleme durumu için; yapıştırıcıdaki ortalama kayma gerilmesi değerinin 700 kPa değerini geçmemesi için ***L*** mesafesi ne olmalıdır?

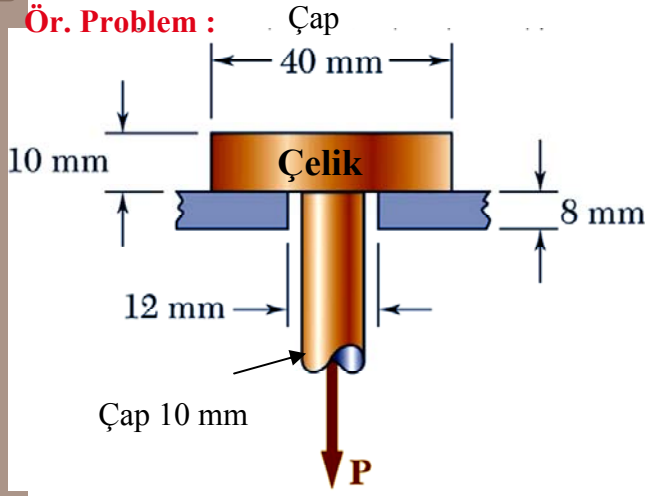
Ör. Problem :



Şekildeki yüklemede P=8 kN olduğunda ahşap parça kesikli çizgilerle gösterilen yerden kırılmaktadır. Kırılma anına karşılık gelen ortalama kayma kayma gerilmesi ne kadardır?

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

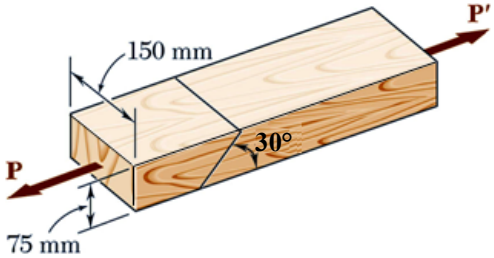
Ör. Problem :



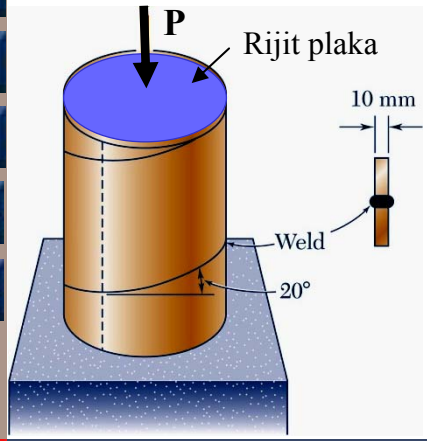
Çelik malzeme için emniyetli normal ve kayma mukavemet değerleri sırasıyla 300 MPa ve 140 MPa, alüminyum plaka için emniyetli kayma mukavemeti 80 MPa olduğuna göre uygulanabilecek en büyük **P** değeri nedir?

Ör. Problem :

Şekildeki ahşap parçalar birbirlerine yatayla 30° lik bir kesit boyunca yapıştırılmıştır. P=11 kN için yapışma yüzeyindeki normal ve kayma gerilme değerlerini bulunuz.



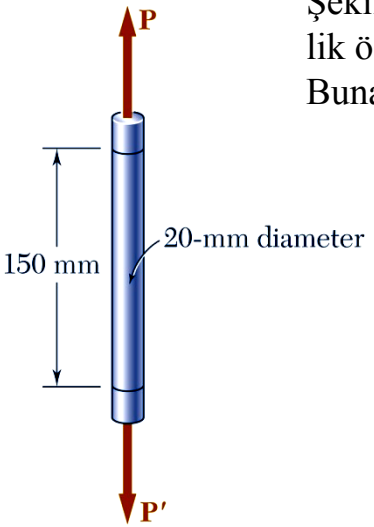
Ör. Problem :



400 mm dış çapına sahip şekildeki çelik boru, 10 mm kalınlığındaki saç şeritlerin 20° lik açıyla helisel olarak kaynatılmasıyla üretilmiştir. Kaynak bölgesinde, kaynağa dik ve teğetsel emniyetli gerilme değerleri σ=60 MPa ve τ=36 MPa olduğuna göre boruya uygulanabilecek emniyetli P kuvvetini bulunuz.

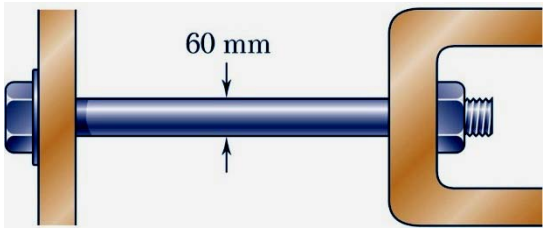
© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Ör. Problem :



Şekildeki plastik çekme test numunesinin; 3.2 kN luk eksenel yükleme altında boyunda (150 mm lik ölçüm boyu-gage length) 11 mm uzama, çapında ise 0.625 mm lik daralma meydana gelmiştir. Buna göre, malzemenin elastisite modülünü, kayma modülünü ve poisson oranını bulunuz.

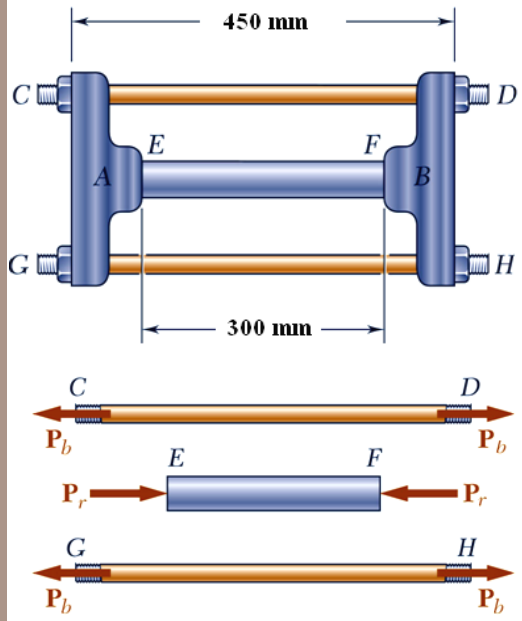
Ör. Problem :



60 mm çapındaki çelik civata bir somun ile sıkıştırıldığında çapında 13 μm lik daralma meydana gelmiştir. Buna göre, civatada meydana gelen içi kuvveti bulunuz. E=200 GPa, ν=0.29.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

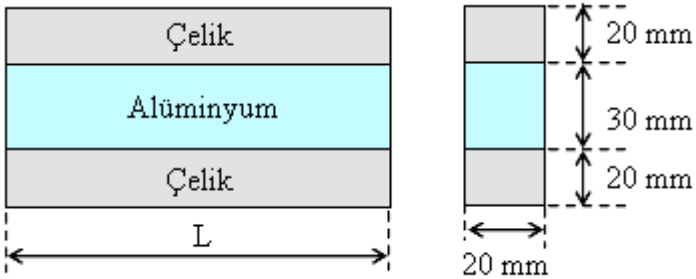
Ör. Problem :



38 mm çapındaki EF alüminyum çubuğu (E=70 GPa), 18 mm çapındaki CD ve GH çelik (E=200 GPa) civatalar vasıtasıyla A ve B rijit parçaları tarafından sıkıştırılmaktadır. Kullanılan somunların hatvesi (vida adımı) 2.5 mm'dir. D ve H somunları vida boşluğu alındıktan sonra çeyrek tur döndürüldüklerine göre; EF alüminyum çubuğundaki normal gerilmeyi bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Ör. Problem :

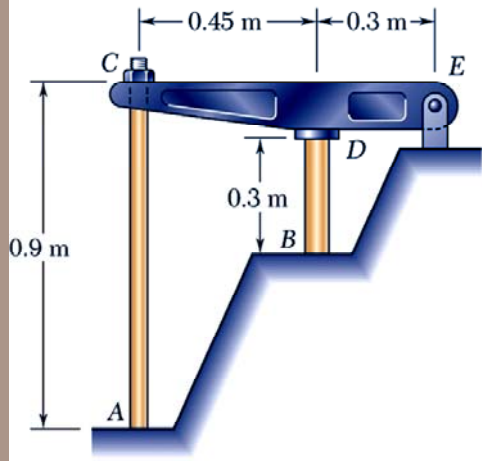


Şekildeki alüminyum ve çelik çubuklar özel bir yapıştırıcı ile birbirlerine bağlanmışlardır. Başlangıçta 20°C de bulunan sistemin sıcaklığı 140 °C ye çıkarılırsa , çubuklarda meydana gelen gerilmeleri bulunuz.

Çelik	*Alu min yum*
$E_ç = 200\,GPa$	$E_a = 70\,GPa$
$\alpha_ç = 11.6 \times 10^{-6}\ /°C$	$\alpha_a = 23.2 \times 10^{-6}\ /°C$

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Ör. Problem :



E noktasında bir pimle bağlı olan CDE rijit çubuğu 30 mm çapında prinç bir silindir (E=105 GPa, α=20.9 x 10^{-6} /°C) üzerinde durmaktadır. Rijit çubuk, C noktasında 22 mm çapındaki çelik AC çubuğu (E=200 GPa, α=11.7 x 10^{-6} /°C) ve bir somun ile (herhangi bir ön gerilme oluşturmayacak şekilde) yatayda sabitlenmiştir. Sistem bu şekilde oda sıcaklığında (20°C) iken sadece prinç silindirin sıcaklığı 50°C'ye çıkarılmıştır. Buna göre silindirde meydana gelen gerilmeyi bulunuz.

© 2009 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.